58. РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА
4 април 2026

IV година
(решенија на задачите)

Задача 1. Сноп електрони со брзина $v_0 = 0,95c$ е насочен кон сад со вода. Движејќи се низ водата, електроните губат енергија поради нивната интеракција со водата, при што зависноста на енергијата од изминатиот пат, x, е дадена со $E = E_0 - \alpha x$, каде што E_0 е почетната енергија на електронот, а $\alpha = 2$ MeV/cm. Колкав пат ќе изминат електроните во водата до моментот кога нивната брзина ќе биде еднаква на брзината на светлината во вода? Индексот на прекршување на водата е $n = 1,33$, додека, пак, масата на мирување на електронот е $m_0 = 0,511$ MeV/c^2.

Решение:

Почетната енергија на електроните изнесува

$$E_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{1}$$

Бидејќи брзината на светлината во вода е

$$v = \frac{c}{n}, \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{2}$$

кога брзината на електроните ќе стане еднаква на брзината на светлината во вода, нивната енергија ќе биде

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}. \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{3}$$

Користејќи ја релацијата дадена во условот на задачата, може да се запише:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - \alpha x, \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{4}$$

од каде што се добива соодветниот изминат пат:

$$x = \frac{m_0c^2}{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}\right) \approx 0,43 \text{ cm}. \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{5}$$

Забелешка: За погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат 2 поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема 1 поен.

Задача 2. Монохроматски сноп термални неутрони со кинетичка енергија $E = 0,025$ eV паѓа на површината на кристал кај којшто растојанието помеѓу кристалографските рамнини, коишто се паралелни на површината на кристалот, е еднакво на $d = 1,2 \cdot 10^{-10}$ m.
а) Да се пресметаат аглите, под коишто се добиваат Браговите максимуми.
б) Да се најде минималната кинетичка енергија на неутроните, за којашто може се набљудува дифракциона слика.
Масата на неутронот е $m = 1,675 \cdot 10^{-27}$ kg, Планковата константа е $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J·s, а елементарниот електричен полнеж изнесува $e = 1,609 \cdot 10^{-19}$ C.

Решение:

Кинетичката енергија на неутроните е многу помала од нивната енергија на мирување, па задачата може да се решава нерелативистички. Според тоа, импулсот на неутроните е даден со

$$p = \sqrt{2mE}, \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{6}$$

од каде што се добива нивната де Брољиева бранова должина:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}. \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{7}$$

Од друга страна, условот за добивање на Браговите максимуми е даден со

$$2d \sin\theta = n\lambda, \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{8}$$

што според равенката (7) може да се запише како

$$\sin\theta = n\frac{h}{2d\sqrt{2mE}}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{9}$$

а) Користејќи ги бројните вредности на дадените величини, равенката (9) може да се запише како

$$\sin\theta = n \cdot 0,754. \tag{10}$$

Функцијата синус е ограничена, т.е. важи $\sin\theta \leq 1$, а во равенката (10), тој услов е исполнет само за $n = 1$, што значи дека се добива само првиот максимум, под агол

$$\theta = \arcsin 0,754 \approx 49^\circ. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{11}$$

б) За да се набљудува дифракциона слика, потребно е да се добие барем еден (првиот) максимум. Користејќи повторно $\sin\theta \leq 1$ и $n = 1$, условот за добивање дифракциона слика се сведува на

$$\sin\theta = \frac{h}{2d\sqrt{2mE}} \leq 1, \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{12}$$

од каде што се добива дека дифракциона слика се набљудува за

$$E \geq \frac{h^2}{8md^2} \approx 0,014 \text{ eV}. \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{13}$$

Забелешка: За погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат 2 поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема 1 поен.

Задача 3. Тргнувајќи од координатниот почеток на системот S, релативистичките честички A и B почнуваат да се движат долж два заемно нормални правца: честичката A се движи во позитивната насока на x-оската на системот S, со брзина $v_\mathrm{A} = c/2$, а честичката B во позитивната насока на y-оската, со брзина $v_\mathrm{B} = c/3$.
а) Да се најде зависноста на координатите на двете честички од времето, во однос на системот S.
б) Да се најде зависноста на координатите на честичката B од времето, во однос на системот S′, во којшто честичката A мирува.
в) Да се најде брзината на честичката B, во однос на системот S′.

Решение:

а) Честичката A се движи долж x-оската на системот S со константна брзина $v_\mathrm{A} = c/2$, па нејзините координати, како функција од времето, се дадени со:

$$x_\mathrm{A}(t) = v_\mathrm{A}t = \frac{c}{2}t; \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{14}$$

$$y_\mathrm{A}(t) = 0, \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{15}$$

при што зедовме предвид дека, во почетниот момент, честичката се наоѓала во координатниот почеток. Честичката B, пак, се движи долж y-оската со константна брзина $v_\mathrm{B} = c/3$, па за нејзините координати важи:

$$x_\mathrm{B}(t) = 0; \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{16}$$

$$y_\mathrm{B}(t) = v_\mathrm{B}t = \frac{c}{3}t. \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{17}$$

б) Нека x'_B, y'_B и t' се соодветните координати во однос на системот S′, во којшто честичката A мирува. Овој систем се движи со брзина v_A долж x-оската на системот S. Согласно Лоренцовите трансформации и равенките (16) и (17), може да се запише:

$$x'_\mathrm{B} = \frac{x_\mathrm{B} - v_\mathrm{A}t}{\sqrt{1 - \frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}}} = -\frac{v_\mathrm{A}t}{\sqrt{1 - \frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}}}; \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{18}$$

$$y'_\mathrm{B} = y_\mathrm{B} = v_\mathrm{B}t; \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{19}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v_\mathrm{A}x_\mathrm{B}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}}}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{20}$$

Користејќи ја равенката (20), равенките (18) и (19) се запишуваат како

$$x'_\mathrm{B}(t') = -v_\mathrm{A}t' = -\frac{c}{2}t'; \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{21}$$

$$y'_\mathrm{B}(t') = v_\mathrm{B}\sqrt{1 - \frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}}\,t' = \frac{\sqrt{3}}{6}ct'. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{22}$$

в) Од последните равенки се забележува дека, во однос на системот S′, проекцијата на брзината на честичката B на x'-оската е

$$v_{x'} = -v_\mathrm{A} = -\frac{c}{2}, \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{23}$$

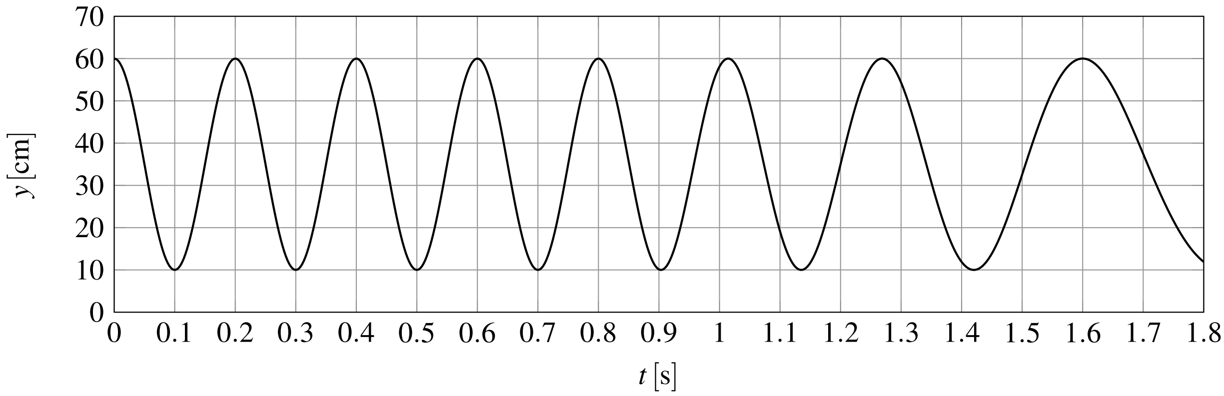
а проекцијата на y'-оската е

$$v_{y'} = v_\mathrm{B}\sqrt{1 - \frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}c, \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{24}$$

па за модулот на брзината на честичката B во однос на честичката A се добива

$$v = \sqrt{v_{x'}^2 + v_{y'}^2} = \frac{c}{\sqrt{3}}. \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{25}$$

Задача 4. Цилиндар се тркала без лизгање долж хоризонтална подлога. На основата на цилиндарот е обележана една точка, чиешто движење се следи со текот на времето. На Слика 1 е прикажана временската зависност на висината на којашто се наоѓа точката во однос на хоризонталната подлога, $y(t)$. Да се одреди патот, којшто ќе го измине цилиндарот до моментот кога ќе застане, ако е познато дека, во првите 0,8 s од почетокот на движењето, центарот на цилиндарот се движел со константна брзина, а потоа почнал рамномерно да ја намалува својата брзина.



Слика 1

Решение:

Висината на обележаната точка во однос на подлогата се менува периодично поради ротацијата на цилиндарот околу неговата оска на симетрија. Нека d е растојанието од точката до оската на ротација. Од графикот се отчитува дека, при тркалањето на цилиндарот, максималната висина на којашто се наоѓа обележаната точка е $y_{\max} = 60$ cm, а минималната $y_{\min} = 10$ cm. Притоа, доколку радиусот на цилиндарот го обележиме со R, важат релациите:

$$y_{\max} = R + d; \qquad y_{\min} = R - d. \tag{26}$$

Елиминирајќи го d од овие равенки, за радиусот се добива

$$R = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2} = 35 \text{ cm}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{27}$$

Во првиот дел на движењето, центарот на цилиндарот се движи со константна брзина, којашто ќе ја означиме со v_0. Од условот за тркалање без лизгање, важи релацијата

$$v_0 = \omega_0 R, \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{28}$$

каде што ω_0 е аголната брзина на цилиндарот.
Од графикот се забележува дека, во првиот дел на движењето, периодот на ротационото движење (временскиот интервал помеѓу два последователни максимума или минимума) е $T = 0,2$ s **(1 поен)**, па за аголната брзина се добива

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 10\pi \text{ rad/s}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{29}$$

Оттука, патот, којшто ќе го помине цилиндарот за време $t_1 = 0,8$ s, е еднаков на

$$s_1 = v_0 t_1 = \omega_0 R t_1 = 8,8 \text{ m}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{30}$$

Потоа, почнувајќи од моментот $t = 0,8$ s, според условот на задачата, брзината (а со тоа и аголната брзина) на цилиндарот се намалува рамномерно. Според графикот, од моментот $t = 0,8$ s до моментот $t = 1,6$ s, т.е. за време $t_2 = 0,8$ s, цилиндарот прави $N = 3$ полни завртувања **(1 поен)**. Бидејќи при едно завртување се опишува агол 2π, во овој временски интервал, цилиндарот при ротацијата опишува агол

$$2N\pi = \omega_0 t_2 - \frac{\alpha t_2^2}{2}, \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{31}$$

од каде што се добива аголното забрзување:

$$\alpha = \frac{2\omega_0 t_2 - 4\pi N}{t_2^2} = 6,25\pi \text{ rad/s}^2, \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{32}$$

а бидејќи тркалањето е без лизгање, забрзувањето на центарот на цилиндарот е

$$a = \alpha R = 6,9 \text{ m/s}^2. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{33}$$

При забавеното движење, брзината на цилиндарот и изминатиот пат се поврзани со релацијата

$$v^2 = v_0^2 - 2as, \tag{34}$$

па патот, којшто ќе го измине цилиндарот од моментот $t = 0,8$ s до моментот кога ќе застане, т.е. кога $v = 0$, е еднаков на

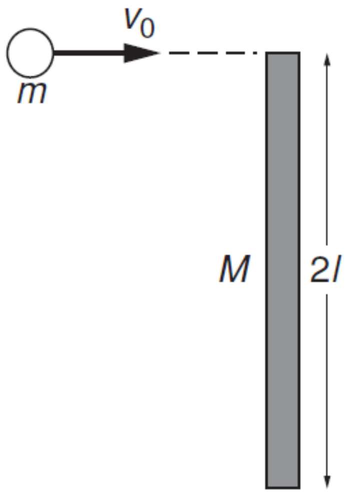
$$s_2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{\omega_0^2 R^2}{2a} = 8,8 \text{ m}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{35}$$

Конечно, за вкупниот изминат пат при движењето се добива

$$s = s_1 + s_2 = 17,6 \text{ m}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{36}$$

Забелешка: За погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат 2 поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема 1 поен.

Задача 5. Хомогена прачка со должина $2l$ и маса M лежи на мазна хоризонтална подлога. Топче со маса m, движејќи се со брзина v_0, ја погодува прачката во едниот нејзин крај, како што е прикажано на Слика 2, при што судирот е еластичен.
а) Да се одреди брзината на топчето по судирот, ако тоа по судирот продолжува да се движи долж првобитниот правец на движење, но во спротивната насока.
б) Каков треба да биде односот m/M за топчето по судирот да не ја промени насоката на движење? Моментот на инерција на прачката во однос на оската, којашто минува низ нејзиниот центар на маса и е нормална на прачката, е еднаков на $I = Ml^2/3$.



Слика 2

Решение:

а) По судирот, прачката ќе почне да ротира околу нејзиниот центар на маса и истовремено ќе изведува и транслаторно движење. Бидејќи судирот е еластичен и системот е изолиран, важат законите за запазување на енергијата, импулсот и моментот на импулсот.
Според законот за запазување на импулсот, важи:

$$mv_0 = MV - mv, \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{37}$$

каде што V е брзината на центарот на прачката, а v брзината на топчето по судирот.
Енергијата на прачката ќе биде збир од енергиите на транслаторното и ротационото движење, т.е. ќе биде еднаква на

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{38}$$

Со примена на законот за запазување на енергијата, се добива

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + \frac{Ml^2\omega^2}{6}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{39}$$

Од законот за запазување на моментот на импулсот, применет во однос на центарот на прачката, следува:

$$mv_0 l = -mvl + \frac{Ml^2}{3}\omega. \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{40}$$

Решавајќи ги равенките (37) и (40) по V и ω, соодветно, се добива

$$V = \frac{m}{M}(v_0 + v); \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{41}$$

$$\omega = \frac{3m}{Ml}(v_0 + v). \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{42}$$

Со внесување на (41) и (42) во (39), се добива

$$v_0^2 - v^2 = \frac{4m}{M}(v_0 + v)^2 \Leftrightarrow v_0 - v = \frac{4m}{M}(v_0 + v), \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{43}$$

од каде што се изразува брзината v:

$$v = v_0 \frac{1 - \frac{4m}{M}}{1 + \frac{4m}{M}}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{44}$$

б) Од добиениот израз за брзината се забележува дека, доколку броителот е негативен, т.е. важи $1 - \frac{4m}{M} < 0$, брзината е негативна, што значи дека насоката на движење на топчето по судирот е спротивна од претпоставената. Оттука, за топчето да не ја промени насоката на движење по судирот, потребно е броителот да биде негативен, што е исполнето кога

$$\frac{m}{M} > \frac{1}{4}. \qquad \textbf{(5 поени)} \tag{45}$$