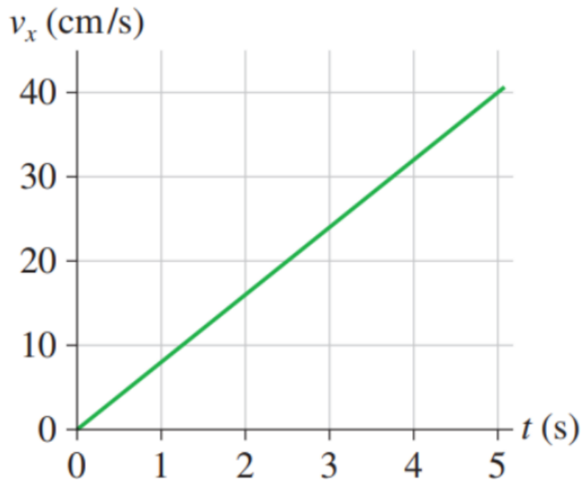
68. РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА

25 април 2026

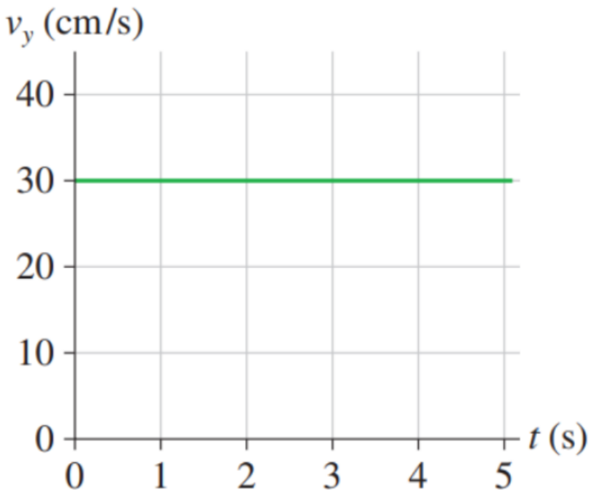
I година

(решенија на задачите)

Задача 1. Тело, коешто во почетниот момент се наоѓа во центарот на координатниот систем, се движи по хоризонтална рамнина без триење. На Слика 1 и Слика 2 претставено е како се менуваат x и y компонентите на брзината на телото со текот на времето. Да се определи поместувањето на телото, сметано од почетокот на координатиот систем, по $t = 5$ s.



Слика 1



Слика 2

Решение:

Во правецот одреден со x-оската, телото се движи со забрзување, при што забрзувањето може да се определи од коефициентот на правецот на правата на првиот график:

$$a_x = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \tag{1}$$

$$a_x = \frac{40 \text{ cm/s} - 0 \text{ cm/s}}{5 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 8 \text{ cm/s}^2 = 0,08 \text{ m/s}^2. \tag{2}$$

4 поени

Затоа, поместувањето на телото долж x-оската е дадено со:

$$x = v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{3}$$

Бидејќи телото нема почетна брзина по x-оската ($v_{x0} = 0$), поместувањето ќе биде:

$$x = \frac{a_x t^2}{2} = \frac{0,08 \text{ m/s}^2 \cdot 5^2 \text{ s}^2}{2} = 1 \text{ m}. \tag{4}$$

6 поени

Во правецот определен со y-оската, телото се движи со постојана проекција на брзината $v_y = 30$ cm/s **(2 поена)** . Поместувањето на телото долж y-оската ќе биде:

$$y = v_y t = 30\ \text{cm/s} \cdot 5\ \text{s} = 150\ \text{cm} = 1,5\ \text{m}. \tag{5}$$

2 поена

Вкупното поместување се добива со користење на Питагоровата теорема:

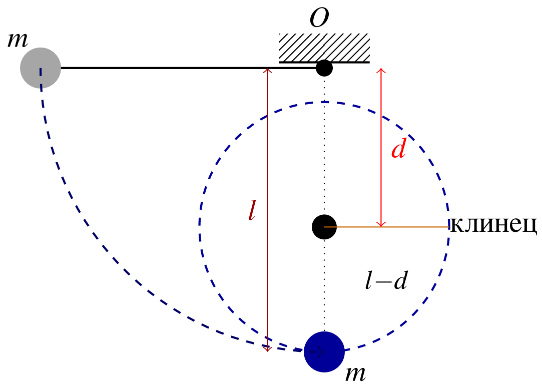
$$d^2 = x^2 + y^2 = 1^2\ \text{m}^2 + 1,5^2\ \text{m}^2 = 3,25\ \text{m}^2, \tag{6}$$

$$d = \sqrt{3,25\ \text{m}^2} = 1,8\ \text{m}. \tag{7}$$

6 поени

Забелешка: За погрешен конечен нумерички резултат се одземаат два поена. За незапишување на мерната единица во која се изразува конечниот резултат, се одзема еден поен.

Задача 2. Нишало е составено од тенок конец со должина l на којшто е закачено мало тело со маса m. Телото е пуштено да се движи од мирување, како што е прикажано на Слика 3. На растојание d под обесната точка на конецот поставен е клинец. Тој го принудува телото да се движи по кружната патеката прикажана на сликата. Да се одреди минималното растојание d, изразено преку растојанието l, така што телото да направи цело завртување околу клинецот.



Слика 3

Решение:

Применувајќи го Законот за запазување на механичката енергија помеѓу почетната положба и најниската точка се добива:

$$mgl = \frac{mv^2}{2}; \tag{8}$$

$$v = \sqrt{2gl}. \tag{9}$$

4 поени

Во моментот кога конецот ќе го удри клинецот, брзината на телото е сè уште $v = \sqrt{2gl}$, но сега тоа ротира околу клинецот со нова (пократка) должина на нишалото $r = l - d$.

2 поена

За телото да продолжи да се движи по кружница, силата на затегнување на конецот во секоја точка од патеката мора да биде поголема од 0. Затоа, за највисоката точка потребно е да е исполнето

$$mg = ma_c, \tag{10}$$

па за минималната брзина во таа точка се добива

$$mg = \frac{mv_1^2}{l-d}; \tag{11}$$

$$v_1^2 = (l-d)g. \tag{12}$$

6 поени

Во највисоката точка, телото се наоѓа на висина

$$H_{\text{врв}} = 2(l-d) \tag{13}$$

од најниската точка. Користејќи го одново Законот за запазување на енергијата, можеме да запишеме

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mg \cdot 2(l-d). \tag{14}$$

4 поени

Заменувајќи $v^2 = 2gl$ и $v_1^2 = (l-d)g$:

$$2gl = (l-d)g + 4(l-d)g; \tag{15}$$

$$2gl = 5(l-d)g. \tag{16}$$

2 поена

Со едноставни трансформации, конечно се добива

$$d = \frac{3l}{5}. \tag{17}$$

2 поена

Задача 3. На хоризонтална шина се поставени две колички со маси $m_1 = 30$ kg и $m_2 = 60$ kg. Помеѓу количките е поставена збиена пружина со занемарлива маса. Кога пружината ќе се пушти, количките добиваат почетна брзина, се откачуваат од пружината и започнуваат да се движат во спротивна насока. Првата количка, поради силата на триење помеѓу неа и шината, по пуштањето изминува пат $S_1 = 10$ m, пред да застане. Коефициентите на триење помеѓу двете колички и шината се еднакви. Колкав пат ќе помине втората количка до моментот кога ќе застане?

Решение:

Бидејќи системот се наоѓа во мирување во почетниот момент, вкупниот импулс на системот пред пружината да се пушти е еднаков на нула. Од Законот за запазување на импулсот следува дека вкупниот импулс на системот пред да се пушти пружината $\vec{p}$ е еднаков со вкупниот импулс по пуштањето на пружината, $\vec{p'}$, односно:

$$\vec{p} = \vec{p'} = 0. \tag{18}$$

2 поена

По пуштањето на пружината телата се движат во спротивни насоки, па затоа:

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2, \tag{19}$$

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}. \tag{20}$$

3 поени

Кинетичките енергии што ги добиваат количките по пуштањето на пружината се:

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \tag{21}$$

$$E_{k2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{22}$$

2 поена

Единствената сила којашто дејствува врз количките по пуштањето на пружината е силата на триење помеѓу количките и подлогата. Работата што ја врши силата на триење е еднаква на промената на кинетичката енергија. Бидејќи по доволно долго време, двете колички ќе застанат, големината на промената на кинетичката енергија на секоја од количките ќе биде:

$$\Delta E_1 = E_{k1} - 0 = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \tag{23}$$

$$\Delta E_2 = E_{k2} - 0 = \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{24}$$

2 поена

Од друга страна пак, работата извршена од страна на силата на триење за секоја од количките изнесува:

$$A_1 = F_{tr1} \cdot S_1 = \mu m_1 g S_1, \tag{25}$$

$$A_2 = F_{tr2} \cdot S_2 = \mu m_2 g S_2. \tag{26}$$

3 поени

Заменувајќи $A_1 = \Delta E_1$ и $A_2 = \Delta E_2$ се добива:

$$\mu m_1 g S_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \tag{27}$$

$$\mu m_2 g S_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{28}$$

3 поени

Со кратење на масите во секоја од равенките и делење на двете равенки се добива:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}. \tag{29}$$

2 поена

Ако сега ја искористиме равенката (20), добиваме

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_1^2}{(\frac{m_1 v_1}{m_2})^2}, \tag{30}$$

1 поен

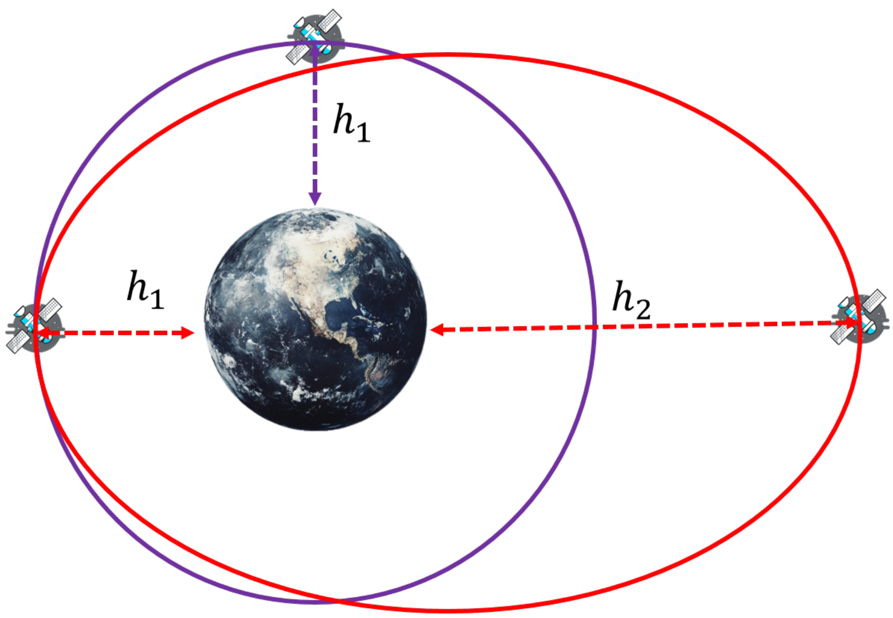
од каде за патот што ќе го помине втората количка се добива:

$$S_2 = S_1 \frac{m_1^2}{m_2^2} = 2,5\ \mathrm{m}. \tag{31}$$

2 поена

Забелешка: За погрешен конечен нумерички резултат се одземаат два поена. За незапишување на мерната единица во која се изразува конечниот резултат, се одзема еден поен.

Задача 4. Меѓународната вселенска станица (МВС) има маса $m = 4,5 \cdot 10^5$ kg и првично се движи по кружна орбита, на висина $h_1 = 400$ km над површината на Земјата.
а) Да се пресмета брзината на МВС во нејзината почетна кружна орбита.
б) Да се одреди орбиталниот период на МВС.
За да се избегнат вселенски остатоци, контролата на мисијата одлучува да ја постави МВС во привремена елиптична орбита. Во новата орбита, перигејот (најблиската точка) останува на растојание $h_1 = 400$ km од површината на Земјата, додека, пак, апогејот (најдалечната точка) се наоѓа на висина $h_2 = 600$ km од површината на Земјата.
в) Ако брзината на МВС во перигејот во оваа нова елиптична орбита изнесува $v_1 = 7,79$ km/s, со примена на законот за запазување на моментот на импулсот да се определи нејзината брзина во апогејот.
Масата на Земјата изнесува $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, радиусот на Земјата е $R = 6370$ km, а гравитациската константа е $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.



Слика 4

Решение:

а) Кај кружна орбита, гравитациската сила делува како центрипетална сила:

$$\frac{\gamma M m}{r_1^2} = \frac{m v_1^2}{r_1} \implies v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_1}}. \tag{32}$$

4 поени

Радиусот на орбитата е $r_1 = R + h_1 = 6370 \text{ km} + 400 \text{ km} = 6770 \text{ km} = 6,77 \cdot 10^6$ m, па затоа

$$v_1 = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,77 \cdot 10^6 \text{ m}}} \approx 7671 \text{ m/s} \approx 7,67 \text{ km/s}. \tag{33}$$

2 поена

б) Периодот на ротација е поврзан со растојанието r_1:

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = 2\pi \sqrt{\frac{r_1^3}{\gamma M}}; \tag{34}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6,77 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}} \approx 5541\ \mathrm{s} \approx 92,3\ \mathrm{min}. \tag{35}$$

6 поени

в) Според законот за запазување на моментот на импулсот ($L_1 = L_2$), бидејќи во перигејот и апогејот векторот на брзината е нормален на радиус-векторот:

$$mv_p r_p = mv_a r_a \implies v_2 = \frac{v_p r_p}{r_a}. \tag{36}$$

4 поени

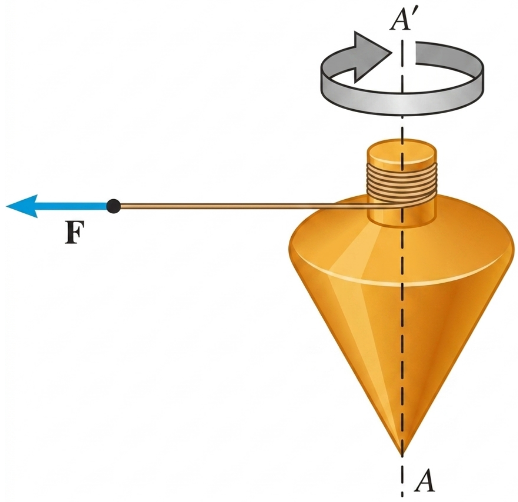
Бидејќи $r_p = R + h_1 = 6770$ km и $r_a = R + h_2 = 6970$ km, добиваме

$$v_2 = \frac{7,79\ \mathrm{km/s} \cdot 6770\ \mathrm{km}}{6970\ \mathrm{km}} \approx 7,57\ \mathrm{km/s}. \tag{37}$$

4 поени

Забелешка: За погрешен конечен нумерички резултат се одземаат два поена. За незапишување на мерната единица во која се изразува конечниот резултат, се одзема еден поен.

Задача 5. Вртимушката прикажана на Слика 5 има момент на инерција $I = 4 \cdot 10^{-4}$ kg·m^2 и на почетокот мирува. Таа може да ротира околу неподвижната оска AA' којашто минува низ нејзиниот центар на маса. Конец, намотан околу оската на вртимушката, се влече во насока нормална на неподвижната оска при што силата на затегнување на конецот се одржува постојана и изнесува $F = 5{,}57$ N. Ако конецот не лизга додека се одмотува од оската, колкава е аголната брзина на вртимушката откако $l = 8$ cm конец е одмотан од оската?



Слика 5

Решение:

I начин

Силата на затегнување на конецот F дејствува на растојание r од оската на ротација (поточно, r претставува радиус на делот од вртимушката каде е намотан конецот), создавајќи момент на сила:

$$M = Fr.$$

3 поени

Применувајќи го Вториот Њутнов закон за ротација, $M = I\alpha$, добиваме дека аголното забрзување на вртимушката е постојано и изнесува:

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{Fr}{I}.$$

3 поени

Бидејќи конецот е намотан околу оската чијшто радиус r е непознат, должината на одмотаниот конец l е поврзана со аголот на ротација θ преку релацијата:

$$l = r\theta,$$

од каде за аголот на ротација се добива:

$$\theta = \frac{l}{r}.$$

3 поени

Во почетниот момент вртимушката мирува ($\omega_0 = 0$), а пак забрзувањето е постојано, па за кинематската равенка за ротационо движење можеме да запишеме:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta.$$

3 поени

Заменувајќи ги добиените изрази за α и θ добиваме:

$$\omega^2 = 2 \cdot \frac{Fr}{I} \cdot \frac{l}{r} = \frac{2Fl}{I},$$

4 поени

каде се забележува дека радиусот r се крати. Конечно:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Fl}{I}},$$

односно:

$$\omega \approx 47,2 \text{ rad/s}.$$

4 поени

II начин

Нека вртимушката има аголна брзина ω по одмотувањето на конецот. Тогаш, нејзината кинетичка енергија е еднаква на

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{38}$$

6 поени

Од друга страна пак, силата F врши работа за да го одмота конецот за должина l еднаква на

$$A = Fl. \tag{39}$$

4 поени

Знаејќи дека почетната кинетичка енергија на вртимушката е еднаква на 0, согласно теоремата за кинетичката енергија, можеме да запишеме

$$\Delta E_k = A \implies \frac{I\omega^2}{2} = Fl. \tag{40}$$

6 поени

Од тука лесно се добива дека

$$\omega = \sqrt{\frac{2Fl}{I}} \approx 47,2 \text{ rad/s}.$$

4 поени

Забелешка: При оценување на задачата, не се комбинираат поени од различните начини на решавање. За погрешен конечен нумерички резултат се одземаат по 2 поена, а за незапишување на мерната единица во којашто се изразува крајниот резултат се одзема 1 поен.