68. РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА

25 април 2026

IV година

(решенија на задачите)

Задача 1. Во однос на системот S, протон се движи со брзина $v = 4c/5$ кон антипротон, којшто мирува. Да се одреди енергијата на секоја од честичките, во однос на референтниот систем S′, во којшто вкупниот импулс на двете честички е еднаков на нула. Масата на мирување на протонот е еднаква на масата на мирување на антипротонот и изнесува $m = 938\ \mathrm{MeV}/c^2$.

Решение:

Нека протонот се движи долж x-оската на системот S, со проекција на брзината на x-оската еднаква на $v_1 = 4c/5$. Нека u е проекцијата на x-оската на брзината на системот S′ во однос на системот S. Тогаш, брзината на протонот, во однос на системот S′ е одредена со

$$v_1' = \frac{v_1 - u}{1 - \frac{uv_1}{c^2}}. \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{1}$$

Антипротонот мирува во однос на системот S, т.е. неговата брзина е $v_2 = 0$, па проекцијата на неговата брзина на x-оската, во однос на системот S′, е еднаква на

$$v_2' = \frac{v_2 - u}{1 - \frac{uv_2}{c^2}} = -u. \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{2}$$

Нека $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ се импулсите на протонот и антипротонот, во однос на системот S′, соодветно. Согласно условот на задачата, важи:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \tag{3}$$

од каде што следува дека

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|, \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{4}$$

односно импулсите на двете честички имаат ист модул, но различни насоки. Бидејќи масите на честичките се еднакви, следува дека и нивните брзини се еднакви по модул, а спротивни по насока, т.е.

$$v_1' = -v_2' = u. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{5}$$

Со користење на равенката (5), равенката (1) се запишува како

$$u = \frac{v_1 - u}{1 - \frac{uv_1}{c^2}}, \tag{6}$$

што се трансформира во квадратна равенка по u:

$$\frac{v_1}{c}u^2 - 2u + v_1 = 0. \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{7}$$

Земајќи предвид дека $v_1 = 4c/5$, како решенија на квадратната равенка се добиваат вредностите $u = c/2$ и $u = 2c$. Второто решение нема физичка смисла бидејќи дава брзина поголема од брзината на светлината во вакуум, па се добива дека брзината на системот S′, во однос на системот S, е еднаква на

$$u = \frac{c}{2}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{8}$$

Бидејќи модулот на брзината на антипротонот, во однос на системот S$'$ е еднаков на u, тогаш неговата енергија во однос на овој систем е

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{c^2}{4c^2}}} = 1083\ \mathrm{MeV}, \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{9}$$

што претставува и енергијата на протонот во однос на овој систем **(2 поена)**, бидејќи модулите на импулсите и масите на двете честички се еднакви.

Забелешка: За секоја погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат два поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема еден поен.

Задача 2. Фотон со бранова должина $\lambda = 2$ pm се расејува од слободен електрон, којшто мирува. По судирот, фотонот се движи долж првобитниот правец на движење, но во спротивната насока. Да се најде кинетичката енергија на електронот по расејувањето. Енергијата на мирување на електронот е еднаква на $E_0 = 511$ keV, а производот на Планковата константа и брзината на светлината во вакуум е $hc = 1240$ eV·nm.

Решение:

Од законот за запазување на енергијата, енергијата на фотонот пред расејувањето, E_1, претставува збир од енергијата на фотонот по расејувањето, E_2 и кинетичката енергија на електронот, T:

$$E_1 = E_2 + T. \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{10}$$

Имајќи предвид дека енергијата и импулсот на фотон се поврзани со релацијата

$$E_\mathrm{f} = p_\mathrm{f} c, \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{11}$$

законот за запазување на импулсот дава:

$$\frac{E_1}{c} = -\frac{E_2}{c} + p, \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{12}$$

т.е.

$$E_1 = -E_2 + pc, \tag{13}$$

каде што p е импулсот на електронот по расејувањето. Собирајќи ги равенките (10) и (13), се добива

$$2E_1 - T = pc. \tag{14}$$

Квадрирајќи ја оваа релација, земајќи притоа предвид дека важи релацијата

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)}, \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{15}$$

се добива кинетичката енергија на електронот:

$$T = \frac{2E_1^2}{E_0 + 2E_1}. \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{16}$$

Енергијата E_1 може да се поврзе со брановата должина според

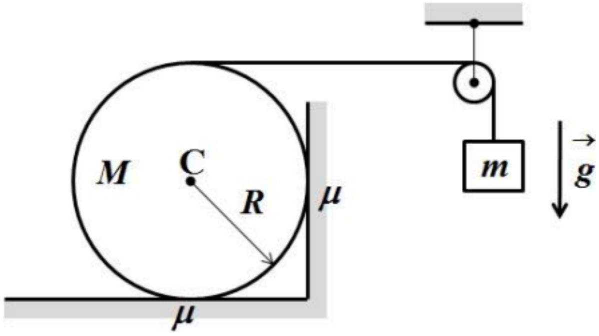
$$E_1 = \frac{hc}{\lambda}, \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{17}$$

па, конечно, се добива:

$$T = \frac{2\left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2}{E_0 + 2\frac{hc}{\lambda}} \approx 439 \text{ keV}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{18}$$

Забелешка: За секоја погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат два поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема еден поен.

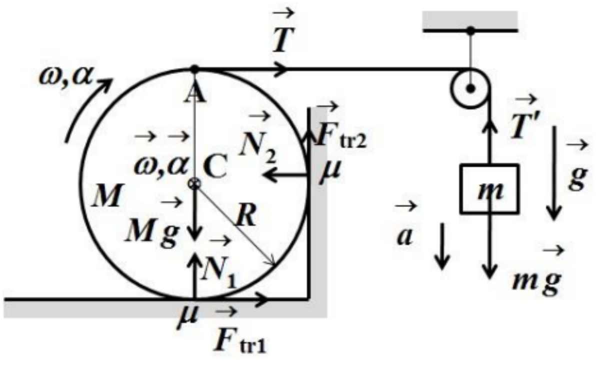
Задача 3. Хомоген цилиндар со маса $M = 8$ kg е поставен на хоризонтална подлога и притоа е потпрен на вертикален ѕид, како на Слика 1. Коефициентот на триење помеѓу цилиндарот и подлогата, како и помеѓу цилиндарот и ѕидот е $\mu = 0,5$. На цилиндарот е намотан тенок нерастеглив конец со занемарлива маса. Другиот крај на конецот, преку макара со занемарлива маса, е закачен за тег со маса $m = 11$ kg. Да се најде забрзувањето на тегот, ако конецот не пролизгува во однос на цилиндарот. При движењето на системот, цилиндарот е постојано во контакт со ѕидот, т.е тој не врши транслаторно движење. Земјиното забрзување е еднакво на $g = 9,81$ m/s^2. Моментот на инерција на цилиндарот, во однос на оската на ротација, е даден со $I = MR^2/2$, каде што R е неговиот радиус.



Слика 1

Решение:

На Слика 2 се прикажани силите, коишто дејствуваат во системот.



Слика 2

Вториот Њутнов закон, запишан за движењето на тегот, има облик:

$$ma = mg - T, \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{19}$$

каде што $T \equiv |\vec{T}| = |\vec{T}'|$ е силата на затегнување на конецот, а a забрзувањето на тегот.
Цилиндарот не врши транслаторно движење, па, според тоа, Вториот Њутнов закон, проектиран на хоризонталната оска дава:

$$T + \mu N_1 - N_2 = 0; \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{20}$$

а на вертикалната:

$$Mg - N_1 - \mu N_2 = 0, \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{21}$$

каде што N_1 и N_2 се силите на нормална реакција на хоризонталната подлога и ѕидот, соодветно. При запишувањето на погорните равенки, беше земено предвид дека силата на триење помеѓу хоризонталната подлога и цилиндарот е еднаква на $F_{\mathrm{tr}1} = \mu N_1$, а силата на триење помеѓу цилиндарот и ѕидот е $F_{\mathrm{tr}2} = \mu N_2$.
Комбинирајќи ги равенките (20) и (21), се добива:

$$N_1 = \frac{Mg - \mu T}{1 + \mu^2}; \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{22}$$

$$N_2 = \frac{T + \mu Mg}{1 + \mu^2}. \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{23}$$

Од сите сили, коишто дејствуваат на цилиндарот, момент на сила создаваат силата на затегнување на конецот и силите на триење. Притоа, моментите на силите на триење се спротивно насочени од моментот на силата на затегнување на конецот. Оттука, може да се запише Вториот Њутнов закон за ротационото движење на цилиндарот:

$$I\alpha = \frac{MR^2}{2}\alpha = (T - \mu N_1 - \mu N_2)R, \qquad \textbf{(4 поени)} \tag{24}$$

каде што α е аголното забрзување на цилидарот. Бидејќи конецот не пролизгува во однос на цилидарот, важи релацијата

$$a = \alpha R. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{25}$$

Имајќи ги предвид равенките (22), (23) и (25), равенката (24) се сведува на

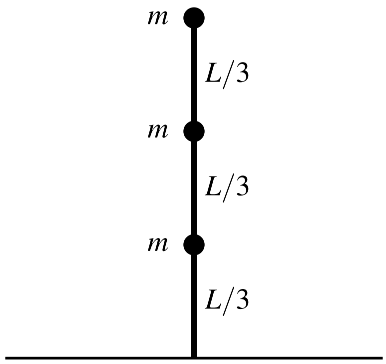
$$\frac{Ma}{2} = T - \mu\frac{Mg - \mu T}{1 + \mu^2} - \mu\frac{T + \mu Mg}{1 + \mu^2}. \qquad \textbf{(1 поен)} \tag{26}$$

Конечно, од равенките (19) и (26), се добива забрзувањето на тегот:

$$a = \frac{m(1 - \mu + 2\mu^2) - \mu M(1 + \mu)}{m(1 - \mu + 2\mu^2) + \frac{1}{2}M(1 + \mu^2)}g \approx 3,07\ \mathrm{m/s^2}. \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{27}$$

Забелешка: За секоја погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат два поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема еден поен.

Задача 4. Хомогена прачка со маса m и должина $L = 1,2$ m е прицврстена на едниот крај за хоризонталната подлога, како што е прикажано на Слика 3. На прачката се прицврстени три еднакви топчиња со маса m, на меѓусебни растојанија $L/3$. Во почетниот момент, прачката стои исправена во вертикалната рамнина, а потоа под дејство на Земјината тежа започнува да ротира. Да се најде брзината на секое од топчињата, во моментот кога ќе удрат во хоризонталната подлога. Моментот на инерција на прачката, во однос на оската, којашто е нормална на неа и минува низ едниот нејзин крај, е даден со $I = mL^2/3$. Земјиното забрзување е еднакво на $g = 9,81$ m/s^2.



Слика 3

Решение:

Согласно условот на задачата, топчињата се оддалечени на растојанија $L/3$, $2L/3$ и L од подлогата, т.е. од оската на ротација. Според тоа, во почетниот момент, потенцијалната енергија на системот, одредена во однос на хоризонталната подлога, е еднаква на

$$U = mg\frac{L}{2} + mg\frac{L}{3} + mg\frac{2L}{3} + mgL = \frac{5}{2}mgL, \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{28}$$

при што првиот член од збирот ја претставува потенцијалната енергија на прачката, чијшто центар на маса е на висина $L/2$, а другите членови ја даваат потенцијалната енергија на топчињата.
Моментот на инерција на системот, во однос на оската на ротација, се одредува како

$$I = \frac{mL^2}{3} + m\left(\frac{L}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2L}{3}\right)^2 + mL^2 = \frac{17mL^2}{9}, \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{29}$$

при што е земено предвид дека моментот на инерција на i-тото топче, коешто се наоѓа на растојание R_i од оската на ротација, е даден со $I_i = mR_i^2$.
Нека ω е аголната брзина на системот во моментот кога топчињата удираат во подлогата, т.е. кога прачката е во хоризонтална положба. Во тој момент, системот има само кинетичка енергија, одредена со

$$T = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{17mL^2\omega^2}{18}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{30}$$

Според законот за запазување на енергијата, важи:

$$U = T, \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{31}$$

односно

$$\frac{5}{2}mgL = \frac{17}{18}mL^2\omega^2. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{32}$$

Оттука се добива аголната брзина на системот:

$$\omega = \sqrt{\frac{45g}{17L}}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{33}$$

Брзината на i-тото топче, коешто се наоѓа на растојание R_i од оската на ротација, се пресметува како

$$v_i = \omega R_i. \tag{34}$$

Оттука, за брзините на трите топчиња се добива:

$$v_1 = \omega R_1 = \sqrt{\frac{45g}{17L}}\frac{L}{3} = 1,86\ \mathrm{m/s}; \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{35}$$

$$v_2 = \omega R_2 = \sqrt{\frac{45g}{17L}}\frac{2L}{3} = 2v_1 = 3,72\ \mathrm{m/s}; \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{36}$$

$$v_3 = \omega R_3 = \sqrt{\frac{45g}{17L}}L = 3v_1 = 5,58\ \mathrm{m/s}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{37}$$

Забелешка: За погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат 2 поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема 1 поен.

Задача 5. Атомите кај двоатомните молекули, каков што е O_2, можат да осцилираат околу центарот на маса на системот, долж правецот којшто ги спојува нивните центри. Како резултат на тоа, кај овие молекули се набљудува вибрационен спектар. За опишување на вибрациите на молекулот O_2, може да се искористи моделот на Морзе, според којшто потенцијалната енергија на заемнодејството помеѓу двата атома, кога тие се оддалечени на растојание r, може да се запише како

$$U(r) = D_\mathrm{e}\left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]^2,$$

каде што $r_0 = 1,21 \cdot 10^{-10}$ m е рамнотежното растојание помеѓу атомите, $a = 2,6 \cdot 10^{10}$ m^{-1}, а D_e е потенцијалната енергија на атомите кога тие се оддалечени на многу големо растојание, т.е. кога хемиската врска е раскината. Во рамките на овој модел, вибрационите енергетски нивоа на молекулот се дискретни (квантувани), па на вибрациона состојба со вибрационен квантен број v ($v = 0, 1, 2\ldots$) ѝ одговара енергија

$$E_v = \hbar\omega_0\left(v + \frac{1}{2}\right) - \hbar\omega_0\chi\left(v + \frac{1}{2}\right)^2,$$

каде што $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ е редуцираната Планкова константа, ω_0 е кружната фреквенција, со којашто се вршат осцилациите, а $\chi = 0,0077$ е коефициент на анхармоничност. Притоа, основната состојба е состојбата со минимална енергија, т.е. состојбата определена со $v = 0$.

а) Да се определи кружната фреквенција ω_0, ако се знае дека, при премин од првата екситирана состојба во основната состојба, се емитира фотон со бранова должина $\lambda = 6,412\ \mu$m.

б) Експериментално е одредено дека, минималната енергија, којашто треба да ја апсорбира молекулот за да дисоцира, кога тој се наоѓа во основната состојба, е еднаква на $D_0 = 5,12$ eV. Да се определи енергијата D_e.

в) Колкав е бројот на вибрациони енергетски нивоа кај O_2?

Брзината на светлината во вакуум е еднаква на $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, додека, пак, Планковата константа е еднаква на $h = 4,136 \cdot 10^{-15}$ eV $\cdot$ s.

Решение:

а) Енергијата на емитираниот фотон може да се пресмета преку брановата должина:

$$E = \frac{hc}{\lambda}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{38}$$

Од друга страна, енергијата на фотонот е разлика од енергијата на првата екситирана состојба ($v = 1$) и енергијата на основната состојба ($v = 0$):

$$E = E_1 - E_0 = \hbar\omega_0\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \hbar\omega_0\chi\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left[\hbar\omega_0\left(0 + \frac{1}{2}\right) - \hbar\omega_0\chi\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2\right], \tag{39}$$

што се сведува на:

$$E = \hbar\omega_0(1 - 2\chi). \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{40}$$

Користејќи ги равенките (38) и (40), се добива кружната фреквенција:

$$\omega_0 = \frac{hc}{\hbar\lambda(1 - 2\chi)} = \frac{2\pi c}{\lambda(1 - 2\chi)} = 2,98 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{41}$$

б) Користејќи ја повторно релацијата за дозволените енергии, дадена во условот на задачата, за енергијата на основната состојба се добива:

$$E_0 = \hbar\omega_0\left(\frac{1}{2} - \frac{\chi}{4}\right) = 0,097\ \mathrm{eV}. \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{42}$$

Согласно условот на задачата, кога молекулот ќе апсорбира енергија поголема или еднаква на D_0, тој дисоцира, односно енергијата на заемнодејството помеѓу атомите станува еднаква на D_e. Според тоа:

$$D_\mathrm{e} = D_0 + E_0 \approx 5{,}22\ \mathrm{eV}. \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{43}$$

в) За молекулот да биде стабилен, неговата енергија треба да биде помала од D_e **(2 поена)**. Ако го разгледаме граничниот случај кога $E = D_\mathrm{e}$, имаме:

$$\hbar\omega_0\left(v+\frac{1}{2}\right) - \hbar\omega_0\chi\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 = D_\mathrm{e}. \qquad \textbf{(3 поени)} \tag{44}$$

Решавајќи ја добиената квадратна равенка по $v+1/2$, се добива

$$v+\frac{1}{2} = \frac{\hbar\omega_0 \pm \sqrt{\hbar^2\omega_0^2 - 4\chi\hbar\omega_0 D_\mathrm{e}}}{2\hbar\omega_0\chi} \qquad \textbf{(2 поена)} \tag{45}$$

Како решенија на квадратната равенка се добиваaат вредностите $v = 36{,}9$ и $v = 92{,}4$, при што предвид треба да се земе првото решение, бидејќи над таа вредност за квантниот број, енергијата е поголема од D_e. Значи, максималниот квантен број, за којшто не настанува дисоцијација на молекулот, е $v = 36$, па бидејќи првото ниво има квантен број $v = 0$, вкупниот број нивоа е 37 **(2 поена)**.

Забелешка: За секоја погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат два поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема еден поен.