68. ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА

25 април 2026

II година

(решенија на задачите)

Задача 1. Две мали еднакви сфери се поставени на непознато растојание во вакуум. Полнежот на првата сфера изнесува $q_1 = 7 \cdot 10^{-8}$ C, а пак полнежот на втората сфера, q_2, е непознат. Помеѓу сферите се јавува електростатска привлечна сила. Откако сферите ќе се допрат и повторно ќе се постават на еднакво растојание како на почетокот, помеѓу нив се јавува одбивна сила, којашто е 9 пати помала од првичната сила. Да се определи непознатиот полнеж q_2.

Решение:

Нека почетното растојание помеѓу сферите е r. Бидејќи почетната сила е привлечна, полнежите q_1 и q_2 се разноимено наелектризирани, т.е. $q_2 < 0$. Според Кулоновиот закон, интензитетот на почетната сила е:

$$F_1 = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{1}$$

Бидејќи сферите се еднакви, по нивниот допир, вкупниот полнеж рамномерно се распределува, па секоја сфера добива полнеж:

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2}. \qquad (\textbf{3 поени}) \tag{2}$$

По повторното разделување, силата е еднаква на:

$$F_2 = k\frac{q^2}{r^2}. \qquad (\textbf{3 поени}) \tag{3}$$

Од условот на задачата:

$$F_2 = \frac{F_1}{9}. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{4}$$

Со замена на релација (1) и релација (3) во релација (4) се добива:

$$9q^2 = -q_1 q_2, \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{5}$$

од каде, користејќи ја релацијата (2), се добива квадратната равенка:

$$q_2^2 + \frac{22}{9}q_1 q_2 + q_1^2 = 0. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{6}$$

Со решавање на оваа квадратна равенка по q_2, се добива:

$$q_2 = \frac{-\frac{22}{9} \pm \sqrt{\left(\frac{22}{9}\right)^2 - 4}}{2} q_1. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{7}$$

Со замена на $q_1 = 7 \cdot 10^{-8}$ C, се добиваат две можни решенија:

$$q_2 = -3,64 \cdot 10^{-8}\,\text{C}, \qquad q_2 = -1,35 \cdot 10^{-7}\,\text{C}. \qquad (\textbf{4 поени}) \tag{8}$$

Забелешка: За секоја погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат два поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема еден поен.

Задача 2. Електрони со брзина $v_0 = 2,0 \cdot 10^7$ m/s, во точката P влегуваат во хомогено магнетно поле, движејќи се нормално на магнетните силови линии, како што е прикажано на Слика 1. Во точката Q, електроните го напуштаат магнетното поле и веднаш влегуваат во хомогено електрично поле на плочест кондензатор, коешто е повторно насочено нормално на правецот на движење на електроните. Електричното и магнетното поле се остро разграничени.

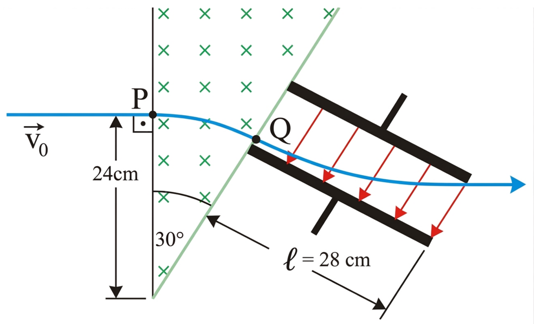
а) Да се определи времето на движење на електроните помеѓу точките P и Q.

б) Да се определи интензитетот на векторот на магнетната индукција B.

в) Растојанието d меѓу плочите и јачината на електричното поле на кондензаторот се подесуваат така што електроните, при излезот од електричното поле, се движат по правец паралелен на оној пред да влезат во магнетното поле. Да се определи јачината на електричното поле E.

г) Да се определи минималното растојание $d_{\min}$ помеѓу плочите на кондензаторот, за кое се исполнети условите од задачата.

На Слика 1 дадени се: радиусот на патеката на електроните во магнетното поле $r = 24\,\text{cm}$, аголот $\alpha = 30^\circ$ и должината на плочите на кондензаторот $l = 28\,\text{cm}$. Полнежот на електроните е $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$, а нивната маса е $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$.



Слика 1

Решение:

а) Кога електроните влетуваат во магнетното поле, нивната брзина не се менува по модул, туку се менува само нејзиниот правец, при што електроните се движат по лак од кружница со радиус $r = 24$ cm. Периодот на движење на електроните по цела кружница е:

$$T = \frac{2\pi r}{v_0}. \quad (\textbf{1 поен}) \tag{9}$$

Бидејќи електроните меѓу точките P и Q минуваат лак, што одговара на агол $\alpha = 30^\circ$, времето на движење е:

$$t_{PQ} = \frac{\alpha}{360^\circ} T. \quad (\textbf{1 поен}) \tag{10}$$

Со замена на Релација (9) во Релација (10), за времето се добива:

$$t_{PQ} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \frac{2\pi r}{v_0}, \quad (\textbf{1 поен}) \tag{11}$$

$$t_{PQ} = 6,3 \cdot 10^{-9}\,\text{s}. \quad (\textbf{2 поена}) \tag{12}$$

б) Во магнетното поле, Лоренцовата сила има улога на центрипетална сила, па важи:

$$\frac{m_e v_0^2}{r} = e v_0 B. \quad (\textbf{1 поен}) \tag{13}$$

Оттука, за магнетната индукција следува:

$$B = \frac{m_e v_0}{er}, \quad (\mathbf{1\ поен}) \tag{14}$$

$$B = 4,7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}. \quad (\mathbf{2\ поена}) \tag{15}$$

в) При движењето низ електричното поле, брзината на електроните можеме да ја разложиме на компонента $v_\perp$, која е нормална на линиите на полето, и компонента $v_\parallel$, која е паралелна на линиите на полето. Бидејќи во магнетното поле не доаѓа до промена на модулот на брзината, важи:

$$v_\perp = v_0 \quad (\mathbf{1\ поен}) \tag{16}$$

и оваа компонента останува непроменета во текот на движењето низ електричното поле, бидејќи тоа не дејствува во овој правец. Брзината $v_\parallel$ може да се добие имајќи предвид дека, во овој правец, електроните се движат рамномерно забрзано движење, без почетна брзина, во насока спротивна на насоката на електричното поле:

$$v_\parallel = a_\parallel t, \quad (\mathbf{1\ поен}) \tag{17}$$

каде што забрзувањето $a_\parallel$ е:

$$a_\parallel = \frac{eE}{m_e}, \quad (\mathbf{1\ поен}) \tag{18}$$

а времето на движење низ кондензаторот е:

$$t = \frac{l}{v_0}. \quad (\mathbf{1\ поен}) \tag{19}$$

Компонентата на брзината, паралелна на линиите на полето при излезот од кондензаторот, е:

$$v_\parallel = \frac{eEl}{m_e v_0}. \quad (\mathbf{1\ поен}) \tag{20}$$

Од условот на задачата, вкупната брзина на електронот, при излезот од полето, е паралелна на почетната брзина v_0. Од сликата се гледа дека аголот меѓу вкупната брзина и компонентата $v_\perp$ е $\alpha = 30^\circ$, па важи:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_\parallel}{v_\perp}. \tag{21}$$

Со замена на добиените изрази, добиваме:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{eEl}{m_e v_0^2}. \quad (\mathbf{1\ поен}) \tag{22}$$

Оттука, за јачината на електричното поле добиваме:

$$E = \frac{m_e v_0^2}{el}\operatorname{tg}\alpha; \tag{23}$$

$$E = 4,7 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \quad (\mathbf{2\ поена}) \tag{24}$$

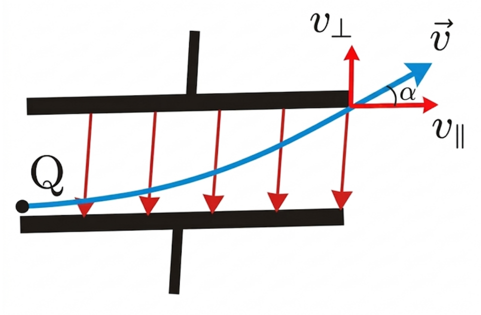
г) Во правец на линиите на електричното поле, поместувањето на електронот е дадено со:

$$y = \frac{1}{2} a_\parallel t^2. \quad (\mathbf{1\ поен}) \tag{25}$$

За електронот да излезе од кондензаторот, а да не удри во горната плоча, т.е. да бидат исполнети условите на задачата, потребно е да важи $y \leq d$. Со помош на релациите (18) и (19), добиваме:

$$d_{\min} = \frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2; \tag{26}$$

$$d_{\min} = 0,081\,\mathrm{m}. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{27}$$



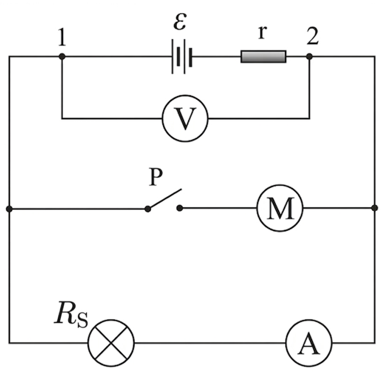
Слика 2

Забелешка: За секоја погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат два поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема еден поен.

Задача 3. Струјното коло, прикажано на Слика 3, содржи извор со електромоторна сила ε и внатрешен отпор $r = 0,05\,\Omega$, мотор, M, со отпор $R_M = 25\,\Omega$, светилка со непознат отпор R_S, идеален волтметар и идеален амперметар. Кога прекинувачот P е отворен, волтметарот покажува напон од $11,5\,\text{V}$, а амперметарот покажува јачина на струја од $9,8\,\text{A}$. Кога прекинувачот се затвора, моторот се вклучува.

а) Колкава е вкупната моќност што изворот ја предава на колото, кога прекинувачот е затворен?

б) Колкава е моќноста на моторот и на светилката, кога прекинувачот е затворен?



Слика 3

Решение:

а) Кога прекинувачот е отворен, низ колото тече струја со јачина $I_1 = 9,8\,\text{A}$, а кога прекинувачот е затворен, вкупната јачина на струјата е I_2. При отворен прекинувач, волтметарот го мери напонот $U_{1,2} = 11,5\,\text{V}$, односно:

$$U_{1,2} = \varepsilon - rI_1, \quad (\textbf{2 поена}) \tag{28}$$

од каде што може да се изрази електромоторната сила ε:

$$\varepsilon = U_{1,2} + rI_1 \approx 12\,\text{V}. \quad (\textbf{2 поена}) \tag{29}$$

Од податоците дадени за случајот кога прекинувачот е отворен, може да се одреди и отпорот на светилката, имајќи предвид дека нејзиниот напон е $U_{1,2} = 11,5\,\text{V}$:

$$R_S = \frac{U_{1,2}}{I_1} = 1,17\,\Omega. \quad (\textbf{2 поена}) \tag{30}$$

Кога прекинувачот е затворен, светилката и моторот се поврзани паралелно. Нивниот еквивалентен отпор изнесува:

$$R = \frac{R_M R_S}{R_M + R_S} = 1{,}12\ \Omega, \tag{31}$$

а вкупниот отпор во колото е:

$$R_e = r + R = 1,17\,\Omega. \quad (\textbf{1 поен}) \tag{32}$$

Јачината на струјата во колото, пак, кога прекинувачот е затворен, изнесува:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_e} = 10,26\,\text{A}. \quad (\textbf{2 поена}) \tag{33}$$

Според тоа, моќноста што ја предава изворот е:

$$P = \varepsilon I_2 = I_2^2 R_e. \quad (\textbf{2 поена}) \tag{34}$$

Со замена на бројните вредности од релациите (29) и (33) во релацијата (34), за моќноста се добива:

$$P = 123\,\mathrm{W}. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{35}$$

б) Губитокот на моќноста во изворот е:

$$P_g = rI_2^2 = 5{,}26\,\mathrm{W}, \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{36}$$

па моќноста на моторот и светилката е:

$$P_M + P_S = P - P_g = 117{,}74\,\mathrm{W}. \qquad (\textbf{1 поен}) \tag{37}$$

Бидејќи моторот и светилката имаат ист пад на напонот, од релацијата за моќност

$$P = \frac{U^2}{R} \tag{38}$$

следува дека:

$$P_S R_S = P_M R_M \qquad (\textbf{1 поен}) \tag{39}$$

од каде:

$$\frac{P_S}{P_M} = \frac{R_M}{R_S} = 21{,}37. \qquad (\textbf{1 поен}) \tag{40}$$

Со комбинација на релациите (37) и (40) за моќноста на моторот и на светилката добиваме:

$$P_M = 5{,}26\,\mathrm{W}, \qquad P_S = 112{,}48\,\mathrm{W}. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{41}$$

Забелешка: За секоја погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат два поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема еден поен.

Задача 4. Кружна контура, којашто е направена од флексибилна железна жица, има почетен периметар $l_1 = 165,0\,\mathrm{cm}$. Нејзиниот периметар се намалува со константна брзина $12,0\,\mathrm{cm/s}$, поради тангенцијална сила, што дејствува на жицата. Контурата се наоѓа во константно, хомогено магнетно поле со индукција $B = 0,500\,\mathrm{T}$, насочено нормално на рамнината на контурата. Да се определи средната индуцирана електромоторна сила во контурата по време $t = 9,0\,\mathrm{s}$ од почетокот на намалувањето на периметарот.

Решение:

а) Индуцираната електромоторна сила ја пресметуваме според:

$$\varepsilon = -B \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (\textbf{3 поени}) \tag{42}$$

Почетниот периметар $l_1 = 165\,\mathrm{cm}$ се намалува со брзина: $\frac{\Delta l}{\Delta t} = 12,0\,\mathrm{cm/s}$. По поминато време од $t = 9,0\,\mathrm{s}$, периметарот се намалил на:

$$l_2 = l_1 - \frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot t = 0,57\,\mathrm{m}. \quad (\textbf{5 поени}) \tag{43}$$

Бидејќи периметарот на кружница со радиус r е даден со $l = 2\pi r$, а плоштината на кругот со $S = \pi r^2$, плоштината може да се изрази преку периметарот според:

$$S = \frac{l^2}{4\pi}. \quad (\textbf{3 поени}) \tag{44}$$

Промената на плоштината е:

$$\Delta S = \frac{l_2^2 - l_1^2}{4\pi}, \quad (\textbf{3 поени}) \tag{45}$$

односно:

$$\Delta S = -0,191\,\mathrm{m}^2. \quad (\textbf{3 поени}) \tag{46}$$

Според равенката (42), средната индуцирана електромоторна сила е еднаква на:

$$\varepsilon = -0,5\ \mathrm{T} \cdot \frac{-0,191\ \mathrm{m}^2}{9,0\ \mathrm{s}} \approx 0,0106\,\mathrm{V} = 10,6\,\mathrm{mV}. \quad (\textbf{3 поени}) \tag{47}$$

Забелешка: За секоја погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат два поена, а за незапишување на мерната единица во крајниот резултат се одзема еден поен.

Задача 5. Тело со маса M е прикачено на хоризонтална пружина со константа k и осцилира со амплитуда A_1. Врз него паѓа тело со маса m и се залепува за него.
а) Да се определат новата амплитуда A_2 и новиот период T_2, ако телото со маса m паѓа врз телото со маса M кога тоа минува низ рамнотежната положба.
б) Да се определат новата амплитуда A_2 и новиот период T_2, ако телото со маса m паѓа врз телото со маса M кога тоа се наоѓа во амплитудна положба.
Да се занемари силата на триење помеѓу осцилаторот и подлогата.

Решение:

Пред судирот, вкупната енергија на осцилаторот е:

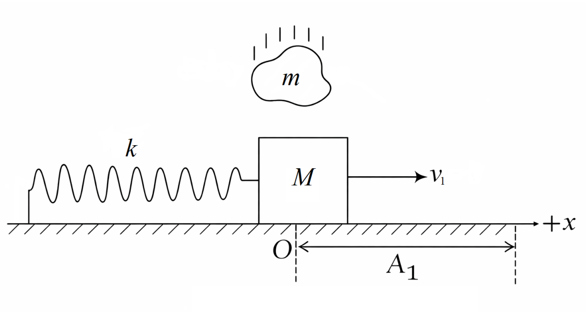
$$E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2. \quad (\textbf{2 поена}) \tag{48}$$

Кога телото со маса M минува низ рамнотежната положба, неговата брзина v_1 е максимална, т.е. телото има само кинетичка енергија, па бидејќи вкупната енергија се запазува, важи:

$$E_1 = \frac{1}{2}Mv_1^2. \quad (\textbf{1 поен}) \tag{49}$$

Оттука:

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}A_1. \quad (\textbf{1 поен}) \tag{50}$$



Слика 4

Судирот е нееластичен, па важи Законот за запазување на импулсот, запишан во однос на x-оската:

$$Mv_1 = (M+m)v_2, \quad (\textbf{2 поена}) \tag{51}$$

од каде што се добива новата амплитуда на брзината:

$$v_2 = \frac{M}{M+m}v_1. \quad (\textbf{1 поен}) \tag{52}$$

По судирот, вкупната енергија на системот изнесува:

$$E_2 = \frac{1}{2}(M+m)v_2^2. \quad (\textbf{1 поен}) \tag{53}$$

Со замена на релациите (52) и (49) во релацијата (53), се добива:

$$E_2 = \frac{M}{M+m}E_1. \quad (\textbf{1 поен}) \tag{54}$$

За енергијата E_2, исто така, важи:

$$E_2 = \frac{1}{2}kA_2^2, \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{55}$$

па добиваме:

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{M}{M+m} \cdot \frac{1}{2}kA_1^2, \tag{56}$$

од каде:

$$A_2 = A_1\sqrt{\frac{M}{M+m}}. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{57}$$

Периодот на осцилирањето по судирот е:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{58}$$

б) Кога второто тело паѓа во амплитудна положба, брзината на првото тело е нула. Бидејќи импулсот на телото пред судирот е еднаков на нула, според Законот за запазување на импулсот, вкупниот импулс на системот, непосредно по судирот, ќе биде еднаков на нула, па кинетичката енергија во таа положба ќе остане еднаква на нула, односно вкупната механичка енергија на системот останува непроменета:

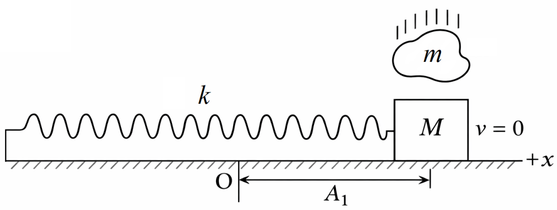
$$E_2 = E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2. \qquad (\textbf{1 поен}) \tag{59}$$

Оттука:

$$A_2 = A_1. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{60}$$

Периодот повторно е:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}. \qquad (\textbf{2 поена}) \tag{61}$$



Слика 5