



## 54. РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА

2 април 2022

IV година

**Задача 1.** На краевите на прачка со занемарлива маса, чијашто должина е 1 m, се наоѓаат две еднакви топчиња, секое со маса од по 10 g. Прачката, заедно со топчињата ротира со постојана аголна брзина од 0,5 rad/s, околу оска којашто минува низ средината на прачката и е нормална на неа. Во еден момент, едно од топчињата паѓа од прачката.

**а.** Дали и како ќе продолжи да ротира прачката после ова? Дали нејзината брзина ќе се намали, зголеми или прачката ќе сопре? Одговорот да се поткрепи со математичко образложение.

**б.** За колку ќе се промени кинетичката енергија на системот при падот на топчето?

Да се смета дека радиусот на топчињата е многу помал од должината на прачката.

**Решение:**

**а.** За системот прачка-топчиња важи законот за запазување на моментот на импулсот, така што динамиката на прачката после падот на едното топче ќе може да се изучи со примената на овој закон. Ако се запишат изразите за моментот на импулсот на системот, пред и после падот на едното од топчињата и се примени законот за запазување на моментот на импулсот, се добива:

$$L_1 = I_1 \omega_1,$$
$$I_1 = 2m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{2},$$

каде што за определувањето на моментот на инерција  $I_1$  е искористено дека масата на прачката е занемарлива, па вкупниот момент на инерција во однос на дадената оска, се должи само на двете материјални точки (топчињата) со еднакви маси и на еднакви растојанија од средината на прачката.

После падот на едното топче, моментот на инерција на системот ќе се намали и е еднаков на:

$$I_2 = m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{4}.$$

Ако сега се запише изразот за моментот на импулсот после паѓањето на топчето и се искористи законот за запазување на моментот на импулсот, ќе се види дека системот ќе започне да ротира со двојно поголема аголна брзина, односно:

$$L_2 = I_2 \omega_2,$$
$$L_1 = L_2,$$
$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2,$$
$$\frac{ml^2}{2} \omega_1 = \frac{ml^2}{4} \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1.$$

**б.** Ако се искористат изразите за моментите на инерција, како и релацијата помеѓу аголните брзини пред и после падот на топчето, за промената на кинетичката енергија се добива:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} - \frac{I_1 \omega_1^2}{2},$$

$$\Delta T = \frac{ml^2 (2\omega_1)^2}{2 \cdot 4} - \frac{ml^2 \omega_1^2}{2 \cdot 2},$$

$$\Delta T = \frac{ml^2 \omega_1^2}{4} = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ J} = 0,625 \text{ mJ}.$$

**Забелешка:** Деловите под **а.** и **б.** носат еднаков број поени, односно по 10 поени. За делот под **а.** се доделуваат сите поени, доколку одговорот на ученикот е поткрепен со математичко образложение. Ако ученикот пресметал бројна вредност на брзината после падот на топчето и дал точен одговор, му се доделуваат сите поени. Доколку има технички грешки при средувањето на конечниот израз под **б.**, а целата постапка е во ред, се одземаат најмногу 4 поени. Доколку ученикот ги има само запишано почетните формули (законот за запазување на импулсот, момент на инерција и слично), а не продолжил да решава му се доделуваат најмногу 5 поени.

**Задача 2.** Кинетичката енергија на еден релативистички електрон е еднаква со неговата енергија во мирување. Да се покаже дека, доколку еден фотон има импулс еднаков со импулсот на овој електрон, тогаш енергијата на фотонот е еднаква на  $\sqrt{3}E_0$ , каде што  $E_0$  е енергијата на електронот во мирување.

**Решение:**

Ако со  $T$  ја означиме кинетичката енергија на електронот, може да запишеме:

$$T = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2,$$

каде што со  $m$  е означена релативистичката маса на електронот, којшто се движи со релативистичка брзина  $v$ , а со  $m_0$  масата на електронот во мирување.

Ако сега го искористиме условот на задачата за еднаквоста на кинетичката енергија на електронот со неговата енергија во мирување, се добива

$$T = m_0c^2,$$

$$T = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2,$$

$$T = (\gamma - 1)m_0c^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

$$(\gamma - 1)m_0c^2 = m_0c^2,$$

$$\gamma = 2, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Конечно, ако добиениот резултат се искористи за да се пресмета енергијата на фотон, чијшто импулс е еднаков со импулсот на разгледаниот електрон, енергијата на фотонот може да се изрази преку енергијата во мирување на електронот, дадена со  $E_0 = m_0c^2$ , на следниот начин:

$$E_{ph} = p_{ph}c,$$

$$p_{ph} = p_{el},$$

$$p_{el} = mv = \gamma m_0v,$$

$$E_{ph} = \gamma m_0vc = \gamma m_0 \frac{v}{c} c^2,$$

$$E_{ph} = \gamma \beta m_0c^2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m_0c^2,$$

$$E_{ph} = \sqrt{3}E_0.$$

**Забелешка:** Доколку ученикот правилно ги запишал изразите за кинетичката енергија на електронот и за енергијата и импулсот на фотонот, но има технички грешки при средувањето на конечниот израз, со што ученикот не го добил бараниот израз се одземаат 8 поени. Доколку ученикот ги има само запишано почетните формули, а не продолжил да решава му се доделуваат најмногу 5 поени.

**Задача 3.** Познато е дека енергетските нивоа на квантните системи, какви што се молекулите, се дискретни. Ова значи дека молекулите може да се наоѓаат во состојби коишто имаат одредена енергија и при премините помеѓу различните состојби да апсорбираат или емитираат електромагнетно зрачење. Двоатомските молекули можат да апсорбираат или емитираат зрачење, како резултат на нивното ротационо или осцилаторно движење. Така, молекулата на јаглерод монооксид (CO) при премин од основното ротационо енергетско ниво на првото возбудено ротационо ниво, апсорбира електромагнетно зрачење со фреквенција  $1,153 \cdot 10^{11}$  Hz.

**а.** Колкава е брановата должина што одговара на ова зрачење?

**б.** Колкава е енергијата на ова зрачење, изразена во електронволти (eV)?

**в.** Енергијата на дискретните ротациони нивоа е дадена со изразот  $E_J = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu r^2}$ , каде што  $J$  е ротациониот

квантен број на даденото ниво и може да ги прима вредностите 0 (основно ниво), 1 (прво возбудено ниво), 2 (второ возбудено ниво), итн., а  $\mu$  е редуцираната маса на молекулата. Да се одреди должината на хемиската врска  $r$  (растојанието помеѓу јаглеродниот и кислородниот атом) на молекулата CO.

Масите на јаглеродот и кислород, изразени во унифицирани атомски единици се 12 а.у. и 16 а.у., соодветно (1 а.у. =  $1,67 \cdot 10^{-27}$  kg). Планковата константа изнесува  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J·s. За брзината на светлината да се земе  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s, а елементарниот електричен полнеж изнесува  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

**Помош:** Редуцираната маса на двоатомски молекул се пресметува преку релацијата  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , каде што  $m_1$  и  $m_2$  се масите на двата атома, односно во случајов на јаглеродниот и кислородниот атом, соодветно.

**Решение:**

**а.** Брановата должина на ова зрачење се одредува едноставно преку релацијата:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,153 \cdot 10^{11}} \text{ m} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,6 \text{ mm}.$$

Според резултатот, може да се заклучи дека зрачењето, коешто се апсорбира при овој премин помеѓу две дискретни ротациони енергетски нивоа е во микробрановото подрачје.

**б.** Енергијата на зрачењето, изразена во електронволти, ќе биде:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,6 \cdot 10^{-3}} \text{ J},$$

$$E = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,6 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 4,78 \cdot 10^{-4} \text{ eV}.$$

**в.** Должината на хемиската врска може да се одреди според промената на енергијата на молекулот при апсорпцијата на зрачењето. Апсорбируваниот квант енергија во дадениов случај, според условот на задачата, одговара на премин од основното кон првото возбудено ниво, односно промената на енергијата на молекулот при ова, е дадена со:

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda},$$

$$\Delta E = E_1 - E_0, E_J = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu r^2},$$

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 1(1+1)}{2\mu r^2} - \frac{\hbar^2 0(0+1)}{2\mu r^2} = \frac{\hbar^2}{\mu r^2},$$

$$r = \sqrt{\frac{\hbar^2}{\mu \Delta E}} = 0,113 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 0,113 \text{ nm}.$$

За пресметката искористена е вредноста на промената на енергијата пресметана во делот **б.** и вредноста на редуцираната маса  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{12 \cdot 16}{12 + 16} \text{ a.u.} = 6,857 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$

**Забелешка:** Деловите **а.** и **б.** носат по 5 поени, а делот **в.** 10 поени. Доколку во делот **в.** ученикот ја пресметал точната вредност на должината на врската, но притоа не покажал дека разликата во енергиите во овој случај е еднаква на енергијата на првото возбудено ниво, туку само директно заменил вредност  $J = 1$  за ротациониот број во дадениот израз за енергијата и ја искористил енергијата пресметана во делот **б.**, му се одземаат 5 поени, независно што бројната вредност на резултатот е точна. Доколку има технички грешки при средувањето на конечниот израз во делот **б.**, а целата постапка е во ред, се одземаат најмногу 3 поени. Доколку запишаните формули се точни и целата постапка е коректна, а има грешка во конечните пресметки на крајниот резултат се одземаат најмногу 2 поени. Доколку некоја од бројните вредности е погрешна, поради погрешно пресметана вредност во претходните чекори, тогаш за тој дел не се одземаат дополнително поени.

**Задача 4.** Електрон со вкупна енергија од 15 eV се наоѓа затворен во цевка, така што во едната половина од цевката е слободен, а во другата половина врз него дејствува некое надворешно поле, при што потенцијалната енергија на електронот во овој дел изнесува 10 eV. Да се одреди односот помеѓу де Брољиевите бранови должини на електронот во двете половици од цевката.

**Решение:**

Де Брољиевата бранова должина се пресметува според релацијата:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

каде што  $p$  е импулсот на честичката и во случајов тој може да се пресмета од нерелативистичката релација за кинетичката енергија, поради малата вредност на енергијата на електронот, односно:

$$T = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mT}.$$

Во делот од цевката во кој електронот е слободен, кинетичката енергија е еднаква на неговата вкупна енергија, додека, пак, во делот каде што дејствува надворешното поле, кинетичката енергија може да се пресмета како разлика од вкупната енергија и потенцијалната енергија на електронот. Според ова, конечно за односот на де Брољиевите бранови должини во двата дела, се добива:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{h}{\sqrt{2mT_1}} \frac{\sqrt{2mT_2}}{h} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{5 \text{ eV}}{15 \text{ eV}}} = 0,58,$$
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{15 \text{ eV}}{5 \text{ eV}}} = 1,73.$$

**Забелешка:** За запишување на де Брољиевата релација меѓу импулсот и брановата должина, се доделуваат 3 поени. Ако ученикот ја најде врската помеѓу кинетичката енергија и импулсот се доделуваат уште 4 поени. Крајната релација, заедно со точната нумеричка вредност, се наградува со преостанатите 13 поени. Ако ученикот грешно ја пресмета нумеричката вредност се одземаат 3 поени.

**Задача 5.** Вселенско летало коешто мирува во референтниот систем  $K'$ , се оддалечува од планетата А со брзина  $v_x = 0,600c$ . Во даден момент леталото емитура зрак од високо енергетски протони со брзина  $u'_x = 0,990c$  во однос на  $K'$ , во насока на неговото движење. Да се пресметаат сите компоненти на брзината на протоните  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ , што би ги детектирал набљудувач кој е во мирување на планетата А, користејќи методи од:

**а.** Њутновата механика;

**б.** специјална теорија на релативност.

За крај, да се споредат резултатите добиени во деловите **а.** и **б.** и да се одговори дали е можно протоните да се движат со брзината на светлината. Одговорот да се образложи.

### Решение:

Зракот од протони се движи во иста насока со вселенското летало со следниве компоненти на брзината:

$$u'_x = 0,990c \quad ; \quad u'_y = 0 \quad ; \quad u'_z = 0.$$

**а.** Во Њутновата механика важи Галилеевото правилото за собирање на брзините, па така за набљудувачот од планетата А, протоните би се движеле со брзина чиишто компоненти изнесуваат:

$$u_x = u'_x + v_x = 0,990c + 0,600c = 1,59c,$$

$$u_y = u'_y + v_y = 0 + 0 = 0,$$

$$u_z = u'_z + v_z = 0 + 0 = 0.$$

**б.** Доколку пак се искористи Ајнштајновиот закон за собирање на брзините, се добиваат следниве вредности за трите компоненти:

$$u_x = \frac{u'_x + v_x}{1 + \frac{u'_x \cdot v_x}{c^2}} = \frac{0,990c + 0,600c}{1 + \frac{0,990c \cdot 0,600c}{c^2}} = 0,997c,$$

$$u_y = \frac{u'_y}{1 + \frac{u'_y \cdot v_x}{c^2}} = 0,$$

$$u_z = \frac{u'_z}{1 + \frac{u'_z \cdot v_x}{c^2}} = 0.$$

Од добиените резултати забележуваме дека според Њутновата механика, за набљудувачот од планетата А, протоните би се движеле со брзина многу поголема од брзината на светлината. Спротивно на ова, во специјалната теорија на релативност, максималната брзина со која може да се движи дадена честичка е брзината на светлината. Дополнително, оваа брзина можат да ја постигнат само честички без маса ( $m = 0$ ), па затоа протоните, чијашто маса во мирување е  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, никогаш не би можеле да се движат со брзината на светлината.

**Забелешка:** Делот **а.** носи 5 поени, а делот **б.** заедно со прашањето, носи 15 поени. Доколку запишаните формули се точни и целата постапка е коректна, а има грешка во конечните пресметки на крајниот резултат се одземаат најмногу 4 поени. Доколку ученикот целосно и точно ги спровел изведувањата и пресметките, но не одговорил на поставеното прашање му се одземаат 4 поени. Ако ученикот дал одговор на прашањето, но без притоа да даде соодветно образложение, му се одземаат 2 поена за тој дел.