ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА 2024
9 февруари 2024

IV година
(решенија на задачите)

Задача 1. Ракетата А се движи со брзина $v_{\mathrm{A}} = 0{,}3c$, а зад неа се движи ракетата С со брзина $v_C = 0{,}7c$. Помеѓу ракетите А и С се движи ракетата В со одредена брзина v_{B}. Сите три ракети се движат долж ист правец и во иста насока, а брзините v_{A}, v_{B} и v_{C} се одредени во однос на неподвижен референтен систем. Да се одреди брзината v_{B}, ако во однос на референтен систем поврзан со ракетата В, ракетите А и С се приближуваат кон ракетата В со брзини коишто се еднакви по модул.

Решение:
Нека ракетите се движат долж *x*-оската и нека со v_{AB} и v_{CB} ги означиме проекциите на *x*-оската на брзините на ракетите А и С во однос на ракетата В, соодветно. Според релативистичкиот закон за собирање на брзините, тие се одредени со:

$$v_{\mathrm{AB}} = \frac{v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}}{1 - \frac{v_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{B}}}{c^2}}, \qquad v_{\mathrm{CB}} = \frac{v_{\mathrm{C}} - v_{\mathrm{B}}}{1 - \frac{v_{\mathrm{C}} v_{\mathrm{B}}}{c^2}}.$$

Согласно условот на задачата, v_{AB} и v_{CB} имаат различен знак, а еднаков модул, па може да се запише:

$$v_{\mathrm{AB}} = -v_{\mathrm{CB}}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}}{1 - \frac{v_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{B}}}{c^2}} = -\frac{v_{\mathrm{C}} - v_{\mathrm{B}}}{1 - \frac{v_{\mathrm{C}} v_{\mathrm{B}}}{c^2}}.$$

Од горната равенка, со замена на вредностите на брзините v_{A} и v_{C}, се добива квадратната равенка

$$v_{\mathrm{B}}^2 - 2{,}42 c v_{\mathrm{B}} + c^2 = 0$$

и со нејзино решавање по v_{B}, се добиваат решенијата $v_{\mathrm{B}} = 1{,}89c$ и $v_{\mathrm{B}} = 0{,}53c$.
Првото решение нема физичка смисла бидејќи дава брзина поголема од брзината на светлината во вакуум, па предвид треба да се земе само решението

$$v_{\mathrm{B}} = 0{,}53c.$$

Забелешка: Доколку ученикот правилно го запише релативистичкиот закон за собирање на брзините на двете ракети А и С, во однос на ракетата В се доделуваат по 4 поени. Ако ученикот точно заклучи дека во однос на системот врзан за ракетата В важи $v_{\mathrm{AB}} = -v_{\mathrm{CB}}$, се доделуваат уште 3 поени. Добивањето на квадратната равенка за брзината на ракетата В се наградува со 3 поени. Решавањето на равенката носи 3 поени, а последните 3 поени се доделуваат доколку ученикот правилно го одбере вистинското физичко решение на квадратната равенка.

Задача 2. Неутрален пион се распаѓа на два фотона, коишто се емитирани долж правецот на движење на пионот пред распаѓањето, но во спротивни насоки. Да се одреди енергијата на секој од фотоните, ако импулсот на пионот пред распаѓањето бил $p = \frac{3}{4} m_0 c,$ каде што m_0 е масата на мирување на пионот, а c брзината на светлината во вакуум.

Решение:
При распадот на пионот важат законите за запазување на енергијата и импулсот. Според законот за запазување на импулсот може да се запише:

$$p = \frac{3}{4} m_0 c = p_1 - p_2,$$

каде што p_1 е модулот на импулсот на фотонот емитиран во насоката на движење на пионот, а p_2 модулот на импулсот на другиот фотон. Ако импулсот на секој од фотоните се изрази преку неговата енергија, се добива:

$$\frac{3}{4} m_0 c = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c}.$$

Од друга страна, според законот за запазување на енергијата, важи:

$$E = E_1 + E_2,$$

каде што E е енергијата на пионот, за којашто од релацијата

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

се добива:

$$E = \frac{5}{4} m_0 c^2.$$

Значи, енергиите на фотоните можат да се добијат од системот равенки

$$\begin{cases} \frac{3}{4} m_0 c = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c} \\ \frac{5}{4} m_0 c^2 = E_1 + E_2 \end{cases},$$

а неговите решенија се

$$E_1 = m_0 c^2, \qquad E_2 = \frac{1}{4} m_0 c^2.$$

Забелешка: За запишување на законите за запазување на импулсот и енергијата се доделуваат по 5 поени. Доколку ученикот користејќи ги релативистичките изрази за енергијата и импулсот добие систем од равенки по енергиите на фотоните се доделуваат уште 5 поени. Решението на системот и добивањето на енергиите на фотоните ги дава преостанатите 5 поени.

Задача 3. Тркало ротира околу неподвижна оска, со фреквенција $f = 20\ \mathrm{s}^{-1}$, при што неговиот момент на импулс во однос на оската на ротација е $L = 2000\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Откако во еден момент престанал да дејствува моментот на сила, којшто ја предизвикувал ротацијата, тркалото прави уште $N = 1000$ завртувања и застанува, како резултат на триењето. Да се одреди моментот на силата на триење во однос на оската на ротација, како и времето поминато од моментот кога тркалото почнало да забавува до моментот кога престанало да се движи.

Решение:
Аголната брзина на тркалото пред да почне да забавува е дадена со изразот

$$\omega_0 = 2\pi f.$$

Кога тркалото престанува да ротира, неговата аголна брзина е еднаква на нула. Според тоа, ако со t и α ги означиме времето на забавување и модулот на аголното забрзување, соодветно, може да се запише:

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0}{t}.$$

Бидејќи при едно завртување тркалото опишува агол од 2π, вкупниот агол којшто ќе го опише тркалото при N завртувања ќе биде $2\pi N$ и за него важи:

$$2\pi N = \omega_0 t - \frac{\alpha t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

Оттука може да се добие времето на забавување на тркалото:

$$t = \frac{4\pi N}{\omega_0} = \frac{2N}{f} = 100\ \mathrm{s}.$$

За да се одреди моментот на силата на триење, најпрво треба да се одреди моментот на инерција на тркалото, I, користејќи ја вредноста на моментот на импулсот дадена во условот на задачата:

$$I = \frac{L}{\omega_0},$$

па за моментот на силата на триење добиваме:

$$M = I\alpha = \frac{L}{\omega_0}\frac{\omega_0}{t} = \frac{L}{t} = 20\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}.$$

Забелешка: За точно запишување на врската помеѓу аголната брзина и фреквенцијата се доделуваат 3 поени, а за точно запишување на аголната брзина како функција од времето се доделуваат уште 3 поени. Ако ученикот точно го определи времето на ротирање на тркалото, се доделуваат уште 5 поени. Ако ученикот ја запише релацијата за врската помеѓу моментот на инерција и моментот на импулс се доделуваат уште 4 поени. Крајната релација за моментот на сила, заедно со точен нумерички резултат се наградуваат со 5 поени. За погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат 2 поена, а за незапишување на мерната единица во која се изразува резултатот се одзема 1 поен.

Задача 4. Хомоген цилиндар со маса $m = 10{,}0\ \text{kg}$ се тркала без лизгање долж хоризонтална подлога. Да се одреди кинетичката енергија на цилиндарот во моментот кога брзината на неговиот центар на маса е $v_{\text{CM}} = 10{,}0\ \text{m/s}$. Моментот на инерција на цилиндар со маса *m* и радиус *R*, се одредува според $I = \dfrac{mR^2}{2}$.

Решение:

Кинетичката енергија на цилиндарот, K, претставува збир од кинетичката енергија на транслаторното движење на центарот на маса на цилиндарот K_{trans} и кинетичката енергија K_{rot}, којашто се должи на ротационото движење на цилиндарот околу оска којашто минува низ центарот на маса:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}}.$$

Кинетичката енергија K_{trans} е дадена со

$$K_{\text{trans}} = \frac{mv_{\text{CM}}^2}{2},$$

а ротационата кинетичка енергија се пресметува како

$$K_{\text{rot}} = \frac{I\omega^2}{2},$$

каде што ω е аголната брзина на цилиндарот, а I е моментот на инерција на цилинидарот во однос на оската на ротација, којшто во овој случај е даден со

$$I = \frac{mR^2}{2},$$

каде што R е радиусот на цилиндарот.

Имајќи предвид дека тркалањето е без лизгање, важи и релацијата

$$v_{\text{CM}} = \omega R,$$

па конечно за вкупната кинетичка енергија се добива:

$$K = \frac{mv_{\text{CM}}^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\frac{\omega^2}{2} = \frac{mv_{\text{CM}}^2}{2} + \frac{mv_{\text{CM}}^2}{4} = \frac{3mv_{\text{CM}}^2}{4} = 750\,\text{J}.$$

Забелешка: Доколку ученикот правилно заклучи дека кинетичката енергија е збир од транслаторната и ротационата енергија се доделуваат 4 поени. Експлицитните изрази за кинетичката и ротационата енергија се наградуваат со по 3 поени. Ако ученикот правилно ја поврзе брзината на центарот на маса со аголната брзина, се доделуваат уште 4 поени. Крајната релација за кинетичката енергија, заедно со точен нумерички резултат се наградува со преостанатите 6 поени. За погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат 2 поена, а за незапишување на мерната единица во која се изразува резултатот се одзема 1 поен.

Задача 5.

а) Да се одредат брановите должини на фотон и електрон, коишто имаат еднаква енергија $E = 20{,}0$ eV.

б) Да се одредат енергиите на фотон и електрон, коишто имаат еднаква бранова должина $\lambda = 250$ nm.

в) Потребно е да се проучи некој органски молекул, долг околу 250 nm, користејќи фотонски или електронски микроскоп. Колкава треба да биде брановата должина приближно, којашто ќе се користи при овој експеримент, и каков треба да биде микроскопот (електронски или фотонски), за да настане минимално оштетување на молекулот при мерењето?

Планковата константа е еднаква на $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s, брзината на светлината во вакуум е $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}$ m/s, масата на електронот е $m = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg и елементарниот електричен полнеж е еднаков на $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

Решение:

Поради вредностите на енергијата и брановата должина дадени во условот на задачата, електронот може да се третира како нерелативистичка честичка, па неговата енергија со неговиот импулс е поврзана со релацијата

$$E_{\mathrm{e}} = \frac{p_{\mathrm{e}}^2}{2m},$$

додека пак, за фотонот важи:

$$E_{\mathrm{ph}} = p_{\mathrm{ph}} c.$$

а) Бидејќи важи $E_{\mathrm{ph}} = E_{\mathrm{e}} \equiv E = 20{,}0\,\mathrm{eV} = 20{,}0 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 3{,}204 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$, добиваме:

$$\lambda_{\mathrm{e}} = \frac{h}{p_{\mathrm{e}}} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 0{,}274\ \mathrm{nm},$$

$$\lambda_{\mathrm{ph}} = \frac{h}{p_{\mathrm{ph}}} = \frac{hc}{E} = 62{,}0\,\mathrm{nm}.$$

б) Во овој случај имаме:

$$E_{\mathrm{e}} = \frac{p_{\mathrm{e}}^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = 2{,}41 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV},$$

$$E_{\mathrm{ph}} = p_{\mathrm{ph}} c = \frac{hc}{\lambda} = 4{,}96\ \mathrm{eV}.$$

в) За проучувањето на молекулот треба да се користи сонда со бранова должина приближно еднаква на должината на молекулот, т.е. околу 250 nm. Од претходното барање на задачата следи дека фотон со бранова должина $\lambda = 250$ nm има многу поголема енергија од електрон со истата бранова должина, па електронскиот микроскоп помалку ќе го оштети молекулот.

Забелешка: Деловите **а)** и **б)** носат по 7 поени, додека делот **в)** носи 6 поени. За секоја погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат по 2 поена, а за незапишување на мерната единица во која се изразува резултатот се одзема 1 поен.