

## 55 РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА, Прилеп - 2012 година

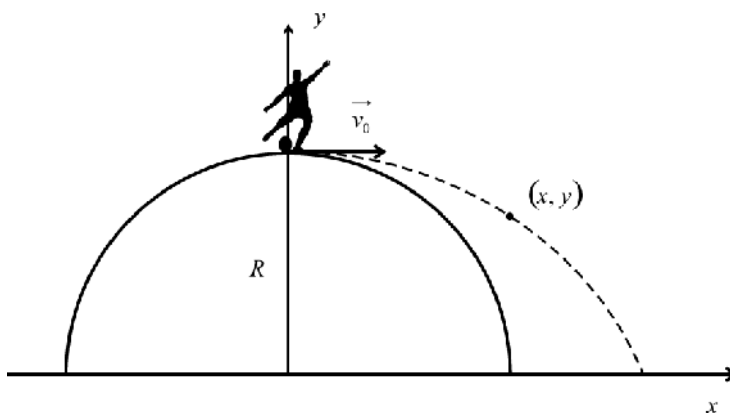
- четврта година -

(решенија на задачите)

1. Фудбалер стои на врвот на една карпа со облик на полутопка и удира фудбалска топка во хоризонтален правец. Колкава треба да биде минималната брзина на топката за таа да не удри во карпата?

**Решение:** Ако топката не удри во карпата, тогаш нејзината траекторијата не се сече со површината на сферата. Поради симетрија задачата може да се поедностави и да се земе дека траекторијата не се сече со големиот круг од сферата. Координатниот почеток го поставуваме во центарот на полутопката. Движењето на топката се разгледува како хоризонтален истрел и според тоа положбата на фудбалската топка во даден момент  $t$  е дадена со изразите

$$x(t) = v_0 t; \quad y(t) = R - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$



За да не удри топката во карпата треба растојанието од точката чии што координати се  $x$  и  $y$  до координатниот почеток да биде поголемо од  $R$ , односно според Питагоровата теорема

$$x^2 + y^2 > R^2. \quad (2)$$

Со елиминација на времето од (1) се добива равенката на траекторијата

$$y(x) = R - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \quad (3)$$

Сега се заменува (3) во (2) и се добива

$$x^2 + \left( R - \frac{g}{2v_0^2} x^2 \right)^2 > R^2, \quad (4)$$

односно после малку средување

$$1 - \frac{Rg}{v_0^2} + \frac{g^2 x^2}{4v_0^4} > 0. \quad (5)$$

Ако (5) се помножи со  $v_0^4$  и се воведат смената  $u = v_0^2$  се добива условот

$$u^2 - Rgu + \frac{g^2 x^2}{4} > 0, \quad (6)$$

кој треба да важи за позитивни  $u$  и сите  $x$  такви што  $0 < x < R$ . Решенија на квадратната равенка во (6) се

$$u_{1,2} = \frac{Rg \pm \sqrt{R^2 g^2 - g^2 x^2}}{2} = g \frac{R \pm \sqrt{R^2 - x^2}}{2}. \quad (7)$$

и тие се реални бидејќи  $R > x$ . Бидејќи изразот во условот (6) е парабола свртена со темето надолу, условот (6) е исполнет само за вредности на  $u$  кои се наоѓаат десно од поголемото од двете решенија во (7)

$$u > g \frac{R + \sqrt{R^2 - x^2}}{2}. \quad (8)$$

Бидејќи топката не треба да удри во никоја точка од карпата, условот (8) треба да важи за сите точки од сферата за кои  $0 < x < R$ , односно

$$u \geq gR. \quad (9)$$

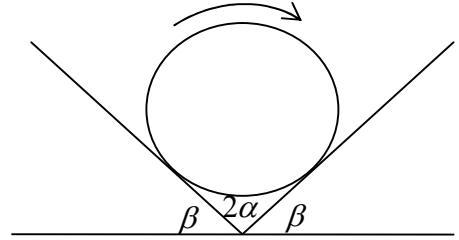
Поради воведената смена  $u = v_0^2$ ,

$$v_0^2 \geq gR, \quad (10)$$

или

$$v_0 \geq \sqrt{Rg}. \quad (11)$$

2. Цилиндер со маса  $m$ , којшто ротира околу својата оска, се поставува помеѓу две плочи кои градат агол  $2\alpha$ . Коефициентот на триење помеѓу цилиндерот и плочите е  $\mu$ . Со колкави сили цилиндерот дејствува на плочите. Аголот помеѓу двете плочи и хоризонталната подлога изнесува  $\beta$ .



**Решение:** На цилиндерот дејствуваат силата на Земјина

тежа  $m\vec{g}$ , силите на нормална реакција на подлогите на двете плочи  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$  и силите на триење помеѓу цилиндерот и двете плочи  $\vec{F}_{tr1}$  и  $\vec{F}_{tr2}$ . Од условот збирот на сите сили коишто дејствуваат на цилиндерот да е еднаков на нула, добиваме (да се види сликата):

$$x - \text{оска: } N_1 \sin \beta + F_{tr1} \sin \alpha - N_2 \sin \beta + F_{tr2} \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$y - \text{оска: } N_1 \cos \beta - F_{tr1} \cos \alpha + N_2 \cos \beta + F_{tr2} \cos \alpha - mg = 0. \quad (2)$$

Користејќи ја врската помеѓу силата на триење и силата на нормална реакција на подлогата  $F_{tr1} = \mu N_1$  и  $F_{tr2} = \mu N_2$ , како и врската помеѓу аглиите  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , од релациите (1) и (2) за силите на нормална реакција на подлогите се добива:

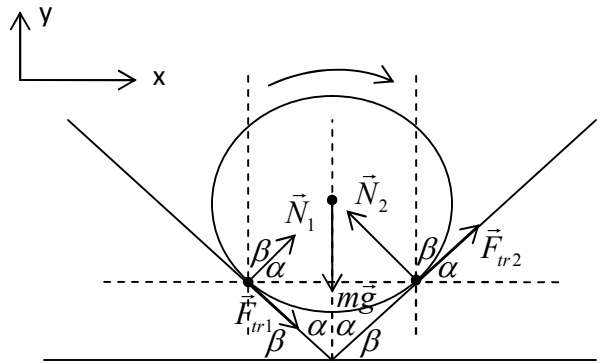
$$N_1 = \frac{mg}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}{2(1 + \mu^2) \operatorname{tg} \alpha}, \quad (3)$$

$$N_2 = \frac{mg}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}{2(1 + \mu^2) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (4)$$

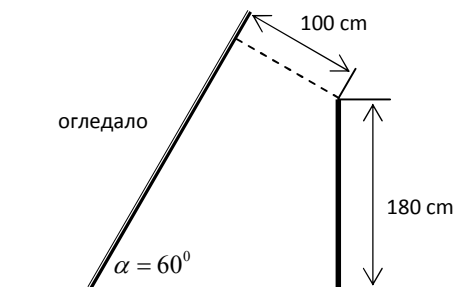
Од третиод Њутнов закон следува дека ова се всушност силите со кои цилиндерот дејствува на плочите.

**Забелешка:** Бидејќи силите на нормална реакција на подлогата по вредност се поголеми од нула, од релацијата (3) следува дека  $1 - \mu \operatorname{tg} \alpha > 0$ , т.е.  $\mu < \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ . Случајот кога  $\mu \geq \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  означува дека

$N_1 = 0$ , т.е. цилиндерот или мирува недопирајќи ја левата плоча, или пак цилиндерот се искачува по десната плоча.



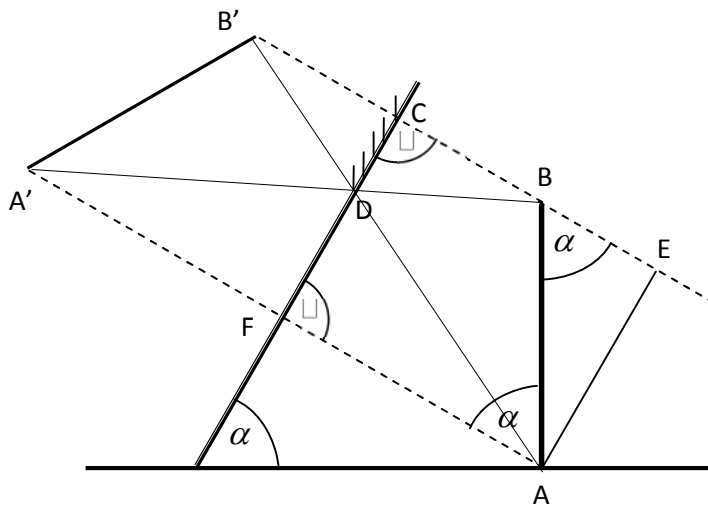
3. Рамно огледало е поставено под агол  $\alpha = 60^\circ$  во однос на хоризонталната подлога. Колкава е минималната должина на огледалото која овозможува во него да се види човек со висина од 180 cm, којшто стои на хоризонталната подлога? Растојанието од очите на човекот до огледалото е 100 cm. Да се занемари растојанието од очите на човекот до неговото теме.



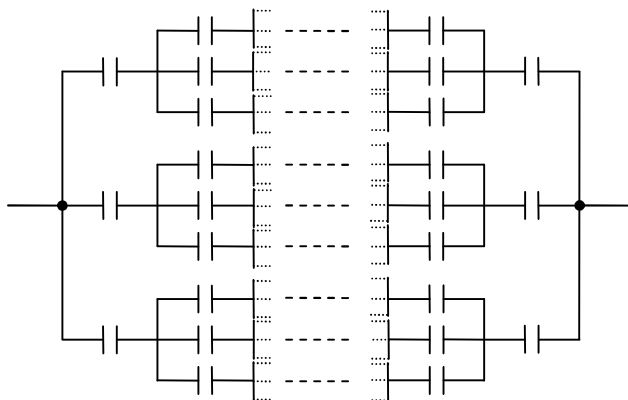
**Решение:**

Првин ќе го конструираме ликот на човекот во огледалото (да се види сликата). Забележуваме дека доволна е должина  $\overline{DC}$  на огледалото, за човекот да миоже да се види целосно во огледалото. Од цликата се гледа дека  $\overline{AB} = 180$  cm,  $\overline{BC} = \overline{B'C} = 100$  cm и  $\Delta BAF = \Delta AOF = \alpha$ , како агли со заемно нормални краци. Исто така,  $\Delta ABE = \Delta AOF = \alpha$ , како агли со заемно нормални краци. Од сликата забележуваме дека  $\overline{AE} = \overline{AB} \sin \alpha$  и дека триаголникот  $AEB'$  е сличен со триаголникот  $DCB'$ . Од сличноста на триаголниците добиваме дека:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EB'}}{\overline{CB'}} \Rightarrow \overline{DC} = \overline{AE} \frac{\overline{CB'}}{\overline{EB'}} = \overline{AB} \sin \alpha \frac{\overline{CB}}{2\overline{CB} + \overline{AB} \cos \alpha} = 53,75 \text{ cm}.$$

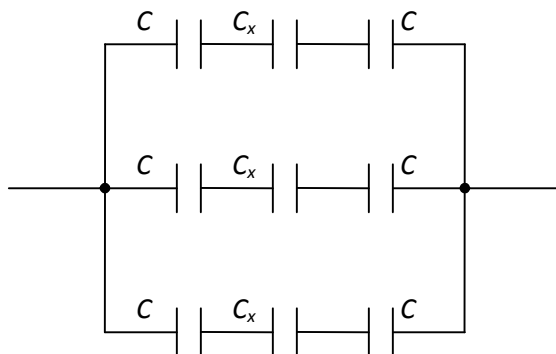


4. Да се определи капацитетот на бесконечниот систем од кондензатори прикажани на сликата. Секоја гранка од системот се разгранува на три идентични гранки. Капацитетот на секој од кондензаторите изнесува  $C$ . (Следната релација за бесконечен геометриски ред може да биде од корист:  $1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}$ ,  $0 < q < 1$ )



**Решение:**

**Начин I.** Нека капацитетот на бесконечниот систем од кондензатори го означиме со  $C_x$ . Од слика 3 забележуваме дека системот од кондензатори можеме да го претставиме со еквивалентен систем прикажан на слика 3а.



Слика 3а

Еквивалентниот капацитет на кондензаторите во секоја од гранките е:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_x} + \frac{1}{C} \Rightarrow C' = \frac{C_x C}{2C_x + C}. \quad (1)$$

Бидејќи капацитетот на системот од кондензатори е  $C_x$ , од слика 3а, добиваме:

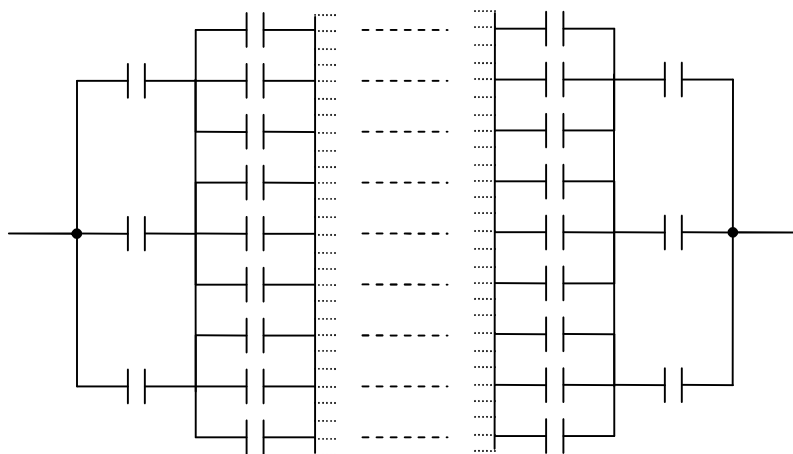
$$C_x = 3C' = \frac{3C_x C}{2C_x + C}, \quad (2)$$

од каде што добиваме дека  $C_x = C$ .

**Начин II.** Задачата може да се реши доколку шемата од слика 3 се претстави со еквивалентна шема (Слика 3б) добиена со спојување на точките коишто се наоѓаат на ист потенцијал. Така од слика 3б добиваме:

$$\frac{1}{C_x} = 2 \left( \frac{1}{3C} + \frac{1}{3^2 C} + \frac{1}{3^3 C} + \dots \right) = \frac{2}{3C} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{2}{3C} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{C}, \quad (3)$$

односно  $C_x = C$ .



Слика 3б

5. Честичка со маса  $m$  се движи во поле на еластични сили и има потенцијална енергија  $U = \frac{kx^2}{2}$ , каде што  $k$  е константа на еластичност, а  $x$  е координата на честичката. Да се определи минималната вредност на енергијата на честичката. Да се користи Хајзенберговиот принцип на неопределеност  $\Delta x \Delta p \approx \hbar$ . (Следните формули за извод на степенска функција може да бидат од корист:  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$  за  $n \in N$ , или пак следното неравенство:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ,  $a > 0$  и  $b > 0$ )

**Решение:**

Честичка која што се движи во поле со потенцијал  $U = \frac{kx^2}{2}$  претставува линеарен хармониски осцилатор. Вкупната енергија на честичката е збир од кинетичката енергија  $T$  и потенцијалната енергија  $U$ , т.е.

$$E = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \quad (1)$$

Неопределеностите на координатата и брзината на честичката се:

$$\Delta x \approx x, \quad (2)$$

$$\Delta v \approx v. \quad (3)$$

Со користење на релациите (1), (2) и (3) и Хајзенберговиот принцип на неопределеност  $\Delta x \Delta p \approx \hbar$ , се добива вкупната енергија на честичката (линеарниот хармониски осцилатор) во зависност со координатата мерена од рамнотежната положба:

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (4)$$

За определување на минималната вредност на енергијата на честичката потребно е првиот извод на енергијата на честичката по координатата  $x$  да биде еднаков на нула, а вториот извод да биде поголем од нула. Така се добива



$$-\frac{\hbar^2}{mx^3} + kx = 0, \quad (5)$$

од каде што за координатата на честичката се добива:

$$x_m = \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{km}}. \quad (6)$$

Со барање на вториот извод се покажува дека истиот е поголем од нула, т.е.  $x_m$  е вредноста на координатата на честичката за која енергијата на честичката е минимална. Со замена на вредноста (6) во релацијата (4) за минималната вредност на енергијата се добива:

$$E_{\min} \approx \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} = \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} = \hbar \omega, \quad (7)$$

каде што  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  е фреквенцијата на линеарниот хармониски осцилатор.

**Забелешка:** Резултатот (6) може директно да се добие од релацијата (4) со користење на неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина, односно:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (8)$$

Со користење на релацијата (8) во (4) се добива ( $a = \frac{\hbar^2}{2mx^2}$ ,  $b = \frac{kx^2}{2}$ ):

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{kx^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mx^2} \frac{kx^2}{2}} = \hbar \sqrt{\frac{k}{m}},$$

односно  $E_{\min} \approx \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} = \hbar \omega$ .